



**TUGAS AKHIR - SM 141501**

**IDENTIFIKASI DAN ESTIMASI VARIABEL KEADAAN  
DARI SISTEM TEREDUKSI DENGAN METODE  
PEMOTONGAN SETIMBANG PADA MODEL KONDUKSI  
PANAS**

**FELLA DIANDRA CHRISANDY  
NRP 1213 100 039**

**Dosen Pembimbing  
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2017**



**TUGAS AKHIR - SM 141501**

**IDENTIFIKASI DAN ESTIMASI VARIABEL KEADAAN DARI  
SISTEM TEREDUKSI DENGAN METODE PEMOTONGAN  
SETIMBANG PADA MODEL KONDUKSI PANAS**

**FELLA DIANDRA CHRISANDY  
NRP 1213 100 039**

**Dosen Pembimbing  
Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp**

**DEPARTEMEN MATEMATIKA  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember  
Surabaya 2017**

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*



***FINAL PROJECT - SM 141501***

***IDENTIFICATION AND ESTIMATION THE STATE VARIABLE  
OF THE REDUCED SYSTEM USING BALANCED  
TRUNCATION METHOD ON HEAT CONDUCTION MODELS***

***FELLA DIANDRA CHRISANDY  
NRP 1213 100 039***

***Supervisors***

***Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si***

***Dr. Chairul Imron, M.I.Komp***

***DEPARTMENT OF MATHEMATICS***

***Faculty of Mathematics and Natural Sciences***

***Sepuluh Nopember Institute of Technology***

***Surabaya 2017***

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## LEMBAR PENGESAHAN

**IDENTIFIKASI DAN ESTIMASI VARIABEL KEADAAN DARI  
SISTEM TEREDUKSI DENGAN METODE PEMOTONGAN  
SETIMBANG PADA MODEL KONDUKSI PANAS**

***IDENTIFICATION AND ESTIMATION THE STATE VARIABLE  
OF THE REDUCED SYSTEM USING BALANCED TRUNCATION  
METHOD ON HEAT CONDUCTION MODELS***

### TUGAS AKHIR

Diajukan Untuk Memenuhi Salah Satu Syarat  
Memperoleh Gelar Sarjana Sains  
pada

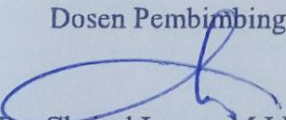
Bidang Studi Matematika Terapan  
Program Studi S-1 Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya

Oleh:

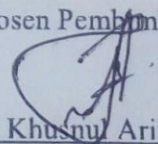
FELLA DIANDRA CHRISANDY  
NRP. 1213 100 039

Menyetujui,

Dosen Pembimbing II

  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp.  
NIP. 19611115 198703 1 003

Dosen Pembimbing I

  
Dr. Didik Khusnu Arif, S.Si., M.Si.  
NIP. 19730930 199702 1 001

Mengetahui,

Ketua Jurusan Matematika

FMIPA-ITS

  
Dr. Imam Makhlash, S.Si, MT

NIP. 19700831 199403 1 003

Surabaya, Juni 2017



*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

# **IDENTIFIKASI DAN ESTIMASI VARIABEL KEADAAN DARI SISTEM TEREDUKSI DENGAN METODE PEMOTONGAN SETIMBANG PADA MODEL KONDUKSI PANAS**

**Nama Mahasiswa** : Fella Diandra Chrisandy  
**NRP** : 1213 100 039  
**Departemen** : Matematika FMIPA-ITS  
**Dosen Pembimbing** : Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

## **ABSTRAK**

Pada tugas akhir ini terdapat dua pokok permasalahan, yaitu mengidentifikasi dan mengestimasi variabel keadaan dari sistem tereduksi linear waktu diskrit dengan metode pemotongan setimbang dan mengimplementasikan permasalahan tersebut pada model konduksi panas. Reduksi model dengan menggunakan metode pemotongan setimbang diterapkan pada sistem linear waktu diskrit berorde  $s$  yang bersifat stabil, terkendali dan teramati sehingga diperoleh sistem tereduksi berorde  $n$  dengan sifat sistem yang sama. Sedangkan identifikasi variabel keadaan dari sistem tereduksi mempermudah perbandingan hasil estimasi sistem tereduksi dan sistem awal. Dalam hal ini diperlukan algoritma filter Kalman untuk proses estimasi. Selanjutnya sebagai studi kasus, permasalahan tersebut diterapkan pada model konduksi panas. Hasil simulasi dengan menggunakan *software* MATLAB, reduksi model dengan menggunakan metode pemotongan setimbang dapat diterapkan pada model konduksi panas yang memenuhi sifat sistem awal stabil, terkendali, dan teramati. Algoritma filter Kalman dapat diimplementasikan pada sistem tereduksi konduksi panas, demikian juga identifikasi variabel keadaan dapat diterapkan pada hasil estimasinya. Berdasarkan nilai error, hasil estimasi terbaik adalah estimasi yang dilakukan pada sistem awal karena memiliki nilai error yang



paling kecil, dengan perubahan persentase relatif minimal sebesar 73,2%. Sedangkan jika ditinjau berdasarkan waktu komputasi, berjalannya reduksi sistem awal, proses estimasi sistem tereduksi, sampai dengan identifikasi hasil estimasi sistem tereduksi lebih cepat dibandingkan dengan proses estimasi sistem awal.

***Kata Kunci:*** *reduksi model, Pemotongan Setimbang, sistem linear, waktu diskrit, identifikasi variabel keadaan, algoritma filter Kalman*

**IDENTIFICATION AND ESTIMATION THE STATE  
VARIABLE OF THE REDUCED SYSTEM USING  
BALANCED TRUNCATION METHOD ON HEAT  
CONDUCTION MODELS**

**Name** : Fella Diandra Chrisandy  
**NRP** : 1213 100 039  
**Department** : Mathematics FMIPA-ITS  
**Supervisors** : Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si  
Dr. Chairul Imron, M.I.Komp

**ABSTRACT**

*In this thesis, there are two principal problems, namely identifying and estimating the variables of the reduced discrete-time linear system using balanced truncation method and implement these problems on heat conduction models. Reduction of the model using balanced truncation method is applied to discrete-time linear system of order  $s$  which is stable, controlled and observed in order to obtain the reduced system of order  $n$  have a same characteristic. In other case the identification of the variables from the reduced system simplify the comparison of the estimation result between the reduced system and the initial system. In this case the Kalman filter algorithms required for the estimation process. Furthermore, the case study for those problems applied in heat conduction models. The simulation results using MATLAB software, reduction of the model using balanced truncation method is only applicable on stable, controlled, and observed heat conduction models. Kalman filter algorithms can be implemented on the reduced system of heat conduction models, similarly the identification of the variables can be applied on the result of its estimation. Based on the error values shows that the best estimation result is the estimation process of the initial system which is obtained the smallest error, with a relative percentage change of at least 73%. In other case*

*based on the computational time, the reduction process of initial sytem, reduced system estimation, until identification of the variables from the result of the reduced system estimation is faster than the estimation process of the initial system.*

**Keywords :** *Reduced Model, Balanced Truncation Method, linear systems, discrete-time, variable identification, kalman filter Algorithms*

## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus atas segala berkat, penyertaan, dan kasih-Nya yang begitu besar dan nyata sehingga penulis dapat menyelesaikan Tugas Akhir yang berjudul **“IDENTIFIKASI DAN ESTIMASI VARIABEL KEADAAN DARI SISTEM TEREDUKSI DENGAN METODE PEMOTONGAN SETIMBANG PADA MODEL KONDUKSI PANAS”**. Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan Tugas Akhir ini tidak terlepas dari bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Bapak Dr. Imam Mukhlash, S.Si, MT selaku Ketua Departemen Matematika FMIPA ITS.
2. Bapak Dr. Didik Khusnul Arif, S.Si., M.Si dan Bapak Dr. Chairul Imron, M.I.Komp selaku dosen pembimbing atas ketulusannya dalam membimbing, memberikan waktu, dan motivasi kepada penulis selama ini.
3. Bapak dan Ibu dosen penguji atas semua saran, kritik, dan masukan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.
4. Bapak Drs. Iis Herisman, M.Si selaku sekretaris prodi atas bantuan dan semua informasi yang diberikan.
5. Bapak Drs. Lukman Hanafi, M.Sc selaku dosen wali yang telah memberikan arahan akademik selama penulis menempuh masa perkuliahan.
6. Bapak dan Ibu dosen serta seluruh staf dan karyawan Departemen Matematika ITS.

Penulis sangat berharap Tugas Akhir ini dapat berguna bagi semua pihak yang membacanya, dan dalam hal pengerjaan tentunya masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun sangat dibutuhkan demi kesempurnaan Tugas Akhir ini.

Surabaya, Juni 2017  
Penulis

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## Special Thank's To

Keberhasilan penulisan Tugas Akhir ini tidak lepas dari orang-orang terdekat penulis. Oleh karenanya penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Tuhan Yesus Kristus, yang selama ini menjadi tempat mengadu dalam berbagai hal. Yang selalu setia mendengarkan, menemani, membimbing, melindungi, dan memberkati segala hal yang penulis lakukan, termasuk dalam penyusunan Tugas Akhir ini.
2. Orang-orang terkasih yang selalu berada di dalam hati penulis. Kedua orang tua saya Ir. Rudy Christanto dan Andria Agustin S.Pd., kakak dan adik saya Fallan Kurnia Andrianto, S.T., M.T. dan Fellia Tesalonika, *my sister in law* Dyah Wulansari, S.AP., juga kekasih saya Hansel Samuel, yang telah senantiasa mendampingi, mendoakan, memberikan motivasi dan dukungan, serta cinta kasih yang begitu besar kepada penulis.
3. Sahabat-sahabat terdekat penulis. Dimaz, Brigita, Gresela, Fristaline, Yoshua, Jonbon, Athan, Zunna, Yenny, Dita, Chyntia, dan Erike, atas waktu kebersamaan, kesukacitaan, dan banyak bantuan yang telah diberikan.
4. Saudari seiman penulis yang terkasih, Kelompok Kecil SNSD. Mbak Iko, Bella, Retty, Pungky, dan Nicea, yang selalu menguatkan melalui doa-doa yang telah diberikan.
5. Teman-teman terbaik yang telah berperan memberikan bantuan dalam pengerjaan Tugas Akhir ini. Helisyah, Airin, Mbak Sheerty, dan Mbak Ena.
6. Teman-teman seperjuangan 116 yang senantiasa saling memotivasi dan memberikan dukungan.
7. Teman-teman angkatan 2013 atas kebersamaannya selama ini.

Akhir kata, semoga Tuhan selalu melimpahkan kasih dan berkat-Nya kepada semua pihak atas semua kebaikan dan bantuan yang telah diberikan. Tuhan memberkati.

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR ISI

	Hal
<b>JUDUL</b> .....	i
<b>LEMBAR PENGESAHAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xvii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xix
<b>DAFTAR SIMBOL</b> .....	xxi
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Batasan Masalah .....	4
1.4 Tujuan .....	4
1.5 Manfaat .....	5
1.6 Sistematika Penulisan .....	5
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Penelitian Terdahulu .....	7
2.2 Landasan Teori .....	8
2.2.1 . Sistem Linear Waktu Diskrit .....	8
2.2.1a Sifat-Sifat Sistem .....	8
2.2.1b Gramian Keterkendalian dan Keteramatan .....	10
2.2.2 Reduksi Model dengan PS.....	10
2.2.2a Sistem Setimbang .....	11
2.2.2b Reduksi Model dengan PS .....	14
2.2.3 Algoritma Filter Kalman.....	16
2.2.4 Identifikasi Variabel Keadaan .....	18
2.2.5 Persamaan konduksi Panas.....	18
<b>BAB III METODOLOGI PENELITIAN</b>	
3.1 Tahapan Penelitian.....	21



## **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

4.1 Diskritisasi dan Pembentukan Sistem Awal	
Konduksi Panas .....	23
4.1.1 Diskritisasi Model Konduksi Panas .....	23
4.1.2 Sistem Awal Konduksi Panas .....	28
4.2 Reduksi Model .....	30
4.2.1 Pembentukan Sistem Setimbang .....	30
4.2.2 Reduksi Orde 10 .....	36
4.3 Implementasi Metode Filter Kalman pada Model	
Konduksi Panas .....	39
4.3.1 Estimasi Sistem Awal Konduksi Panas .....	39
4.3.2 Estimasi Sistem Tereduksi Konduksi Panas .....	41
4.4 Identifikasi Sistem .....	43
i Mendapatkan Penyelesaian Sistem Awal .....	43
ii Mendapatkan Sistem Setimbang .....	44
iii Identifikasi Hasil Estimasi Sistem Tereduksi .....	44
4.5 Analisa Perbandingan .....	46

## **BAB V PENUTUP**

5.1 Kesimpulan .....	55
5.2 Saran .....	56

<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>	<b>57</b>
-----------------------------	-----------

<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>59</b>
-----------------------	-----------

<b>BIODATA PENULIS .....</b>	<b>77</b>
------------------------------	-----------

## DAFTAR GAMBAR

	Hal
<b>Gambar 3.1</b>	Diagram Alir Metodologi Penelitian .....59
<b>Gambar 4.1</b>	Perambatan Panas pada Batang .....23
<b>Gambar 4.2</b>	Isolasi Batang Secara Sempurna.....27
<b>Gambar 4.3</b>	Nilai Singular Hankel .....34
<b>Gambar 4.4</b>	Frekuensi Respon Sistem Awal ( $A, B, C, D$ ) dan Sistem Setimbang ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ) .....35
<b>Gambar 4.5</b>	Frekuensi Respon Sistem Awal ( $A, B, C, D$ ) dan Sistem Tereduksi ( $\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ ) Orde 10 dengan BT terhadap Output.....39
<b>Gambar 4.6</b>	Penyebaran Panas pada Batang Logam Terhadap Posisi.....48
<b>Gambar 4.7</b>	Perbandingan Error Hasil Estimasi Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 10.....49
<b>Gambar 4.8</b>	Penyebaran Panas pada Batang Logam Terhadap Iterasi .....50

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR TABEL

	Hal
<b>Tabel 4.1</b> Nilai Singular Hankel .....	33
<b>Tabel 4.2</b> Syarat Besar Orde Tereduksi dengan BT.....	36
<b>Tabel 4.3</b> Hasil Estimasi Sistem Awal.....	41
<b>Tabel 4.4</b> Hasil Estimasi Sistem Tereduksi Orde 10 .....	42
<b>Tabel 4.5</b> Penyelesaian Dinamika Sistem Awal Terhadap Waktu.....	43
<b>Tabel 4.6</b> Nilai Sistem Setimbang Terhadap Waktu.....	44
<b>Tabel 4.7</b> Hasil Identifikasi dari Estimasi Sistem Tereduksi Orde 10 .....	46
<b>Tabel 4.8</b> Nilai MAE Estimasi Sistem Awal .....	47
<b>Tabel 4.9</b> Nilai MAE Estimasi Sistem Tereduksi Orde 10 .....	47
<b>Tabel 4.10</b> Perbandingan Nilai MSE pada Iterasi ke $T = 100$ antara Estimasi Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 10 .....	51
<b>Tabel 4.11</b> Perbandingan Nilai MSE dan Waktu Komputasi Orde Sistem yang Memenuhi Syarat Tereduksi.....	52

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## DAFTAR SIMBOL

$x_k$	Variabel keadaan pada sistem diskrit.
$u_k$	Vektor masukan pada sistem diskrit.
$y_k$	Vektor keluaran pada sistem diskrit.
$A, B, C, D$	Matriks-matriks konstan sistem diskrit dengan ukuran yang bersesuaian dan diasumsikan $A$ non singular.
$\lambda$	Nilai eigen.
$M_c$	Matriks keterkendalian sistem awal.
$M_o$	Matriks keteramatan sistem awal.
$W$	Gramian keterkendalian sistem awal.
$M$	Gramian keteramatan sistem awal.
$G_s$	Fungsi transfer sistem awal.
$U$	Transformasi matriks unitary dekomposisi.
$T$	Matriks transformasi non singular.
$\Sigma$	Gramian kesetimbangan.
$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$	Sistem setimbang waktu diskrit.
$\tilde{M}_c$	Matriks keterkendalian sistem setimbang.
$\tilde{M}_o$	Matriks keteramatan sistem setimbang.
$\tilde{W}$	Gramian keterkendalian sistem setimbang.
$\tilde{M}$	Gramian keteramatan sistem setimbang.
$\sigma_i$	Nilai singular Hankel.
$\tilde{x}_{rk}$	Variabel keadaan sistem tereduksi.
$\tilde{u}_{rk}$	Vektor masukan pada sistem tereduksi.
$\tilde{y}_{rk}$	Vektor keluaran pada sistem tereduksi.
$\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$	Sistem tereduksi dengan BT.
$\tilde{M}_{c_r}$	Matriks keterkendalian sistem tereduksi.
$\tilde{M}_{o_r}$	Matriks keteramatan sistem tereduksi.
$G_r$	Fungsi transfer sistem tereduksi.
$x$	Nilai real sistem awal.
$\hat{x}$	Hasil estimasi sistem awal.
$\hat{\tilde{x}}_r$	Hasil estimasi sistem tereduksi.
$\hat{\tilde{x}}_{ri}$	Hasil identifikasi estimasi sistem tereduksi.

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

Pada bab ini dijelaskan mengenai latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, serta sistematika penulisan dalam Tugas Akhir.

### **1.1 Latar Belakang**

Permasalahan yang dapat dimodelkan sebagai suatu sistem banyak dijumpai di dalam kehidupan sehari-hari seperti permasalahan air sungai, turbulensi pada pesawat, ketinggian pasang surut air laut, dan salah satunya adalah permasalahan pada distribusi konduksi panas. Pemodelan sendiri merupakan jembatan penghubung yang sanggup menjawab keingintahuan atas fenomena yang terjadi, dimana model matematika secara visual dipandang sebagai suatu rumusan yang dapat mewakili fenomena alam sehingga membantu menemukan solusi dari permasalahan yang ada. Pemodelan permasalahan nyata tersebut tentunya sangat kompleks sehingga pada umumnya bentuk dari sistem yang terkait juga memiliki orde yang besar.

Secara langsung bisa dikatakan bahwa sistem adalah bagian dari realita. Realita diluar sistem dinamakan “sekitar sistem”. Interaksi diantara sistem dan sekitar sistem direalisasikan lewat besaran, sangat sering merupakan fungsi dari waktu yang dinamakan masukan (*input*) dan keluaran (*ouput*). Sistem dipengaruhi sekitar melalui masukan dan sistem mempunyai pengaruh pada sekitar melalui keluaran. Masukan dan keluaran sistem yang disajikan oleh *signal* atau fungsi dari waktu bisa merupakan waktu yang kontinu atau diskrit[1].

Sistem yang telah dimodelkan kemudian diubah menjadi instruksi dari suatu komputer. Hal ini memungkinkan hasil pemodelan suatu sistem berorde besar dan kompleks yang dikarenakan oleh banyaknya variabel keadaan (*state*) dari sistem tersebut. Semakin banyak variabel keadaan yang digunakan maka model matematikanya akan semakin mendekati fenomena yang



sebenarnya. Tetapi nyatanya kebutuhan akan model dengan tingkat akurasi yang tinggi memunculkan berbagai persoalan baru seperti lamanya waktu komputasi sampai penggunaan memori yang besar, kesulitan dalam hal analisa, optimasi, serta desain kendali. Sehingga dibutuhkan pendekatan model dengan orde yang lebih kecil namun tetap memiliki perilaku dinamik yang sama dengan model awal. Untuk itu digunakan penyederhanaan sistem yang berorde besar, agar memiliki orde yang lebih kecil tanpa kesalahan yang signifikan. Penyederhanaan sistem inilah yang dimaksud dengan reduksi model[2]. Beberapa penelitian mengenai analisis reduksi model telah dilakukan sebelumnya, baik untuk sistem linear waktu diskrit maupun kontinu[3,4].

Hingga saat ini telah banyak dikembangkan beberapa metode reduksi model salah satunya adalah Pemotongan Setimbang (*Balanced Truncation/BT*), dimana metode ini paling sering digunakan karena sederhana dan konstruksinya berdasarkan dekomposisi aljabar linear biasa. Metode ini juga menjamin sifat-sifat dari sistem awal selalu dipertahankan. Hasil reduksi sistem dengan menggunakan BT akan mempunyai sifat yang sama dengan sifat sistem semula yaitu stabil, terkendali, dan teramati[2]. Sedangkan untuk reduksi model pada sistem yang tak stabil menggunakan BT [5] beserta penerapannya pada persamaan aliran air yang dangkal [6] juga telah dilakukan sebelumnya.

Di sisi lain masalah estimasi variabel keadaan pada sistem dinamik juga sangat penting. Estimasi merupakan metode untuk menaksir nilai kuantitas yang tidak diketahui dari data yang tersedia. Dalam sistem yang besar, estimasi ini sangat perlu dilakukan karena tidak semua variabel keadaan pada sistem tersebut dapat diukur secara langsung. Terdapat banyak metode dalam estimasi berdasarkan bentuk sistem yang diamati. Estimasi pada sistem dinamik stokastik dilakukan menggunakan filter Kalman[7]. Filter Kalman adalah algoritma rekursif untuk mengestimasi variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik. Contoh penerapannya telah dilakukan pada *stirred tank reactor*

namun dengan jenis lain metode filter Kalman yaitu *fuzzy Kalman filter*[8].

Estimasi variabel keadaan dengan filter Kalman dilakukan dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan dinamika sistem dan data pengukuran[9]. Ketika algoritma filter Kalman diaplikasikan pada sistem berskala besar maka dibutuhkan waktu komputasi yang lama. Dalam *Construction Of the Kalman Filter Algorithm On the Model Reduction*[10] telah dikembangkan algoritma filter Kalman pada model tereduksi. Namun ada kesulitan untuk membandingkan hasil estimasi pada sistem tereduksi dengan sistem awal karena orde yang berbeda. Orde yang berbeda antara kedua sistem tersebut mengakibatkan variabel keadaan yang ada juga berbeda. Oleh sebab itu dibutuhkan identifikasi variabel keadaan untuk mengetahui hubungan antar variabel keadaan pada sistem awal dan hasil estimasi sistem tereduksi. Hal ini bertujuan untuk mendapatkan variabel keadaan yang bersesuaian, sehingga hasil estimasi pada sistem tereduksi dapat dibandingkan dengan sistem awal[11].

Berdasarkan latar belakang di atas pada Tugas Akhir ini akan dilakukan identifikasi dan estimasi variabel keadaan dari sistem tereduksi dengan metode Pemotongan Setimbang (*Balanced Truncation/BT*), dan sebagai pendukung hasil analisa akan dilakukan penerapan pada model konduksi panas. Simulasi dan pemrograman terkait menggunakan *software* MATLAB.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan pada latar belakang di atas, maka permasalahan yang akan dibahas dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana reduksi model pada model konduksi panas?
2. Bagaimana implementasi algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi untuk model konduksi panas?
3. Bagaimana identifikasi variabel keadaan pada hasil estimasi sistem tereduksi untuk model konduksi panas?

4. Bagaimana perbandingan simulasi hasil estimasi pada sistem awal dan hasil estimasi pada sistem tereduksi yang teridentifikasi untuk model konduksi panas?

### 1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang di atas, maka batasan masalah yang akan ditetapkan dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Sistem yang dibahas adalah sistem dinamik yang linear, *time invariant*, diskrit, dan stokastik, serta diasumsikan bersifat stabil, terkendali, dan teramati.
2. Pemodelan konduksi panas didekati dengan persamaan aliran panas berdimensi satu dan dalam kondisi awal terisolasi sempurna.
3. Sistem berada dalam keadaan tak tunak/aliran *transient (unsteady state)* berdasarkan peristiwa perubahan temperatur yang terjadi pada suatu media.
4. Pendiskritan model dilakukan dengan metode beda hingga eksplisit yaitu beda maju untuk turunan pertama dan beda pusat untuk turunan kedua.

### 1.4 Tujuan

Berdasarkan pada latar belakang di atas, maka tujuan yang hendak dicapai dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui langkah-langkah reduksi model pada model konduksi panas.
2. Mengimplementasikan algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi untuk model konduksi panas.
3. Mengetahui langkah-langkah identifikasi hasil estimasi variabel keadaan pada sistem tereduksi untuk model konduksi panas.
4. Memperoleh perbandingan simulasi hasil estimasi pada sistem awal dan hasil estimasi pada sistem tereduksi yang teridentifikasi untuk model konduksi panas.

## **1.5 Manfaat**

Berdasarkan pada latar belakang di atas, maka manfaat yang akan diperoleh dalam Tugas Akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Memberikan informasi mengenai penerapan reduksi model pada model matematika yang memiliki orde besar sehingga dapat mempermudah proses perhitungan dan analisa dan mempersingkat waktu komputasi.

Memberikan informasi mengenai pembentukan algoritma filter Kalman pada sistem tereduksi dan penerapan identifikasi variabel keadaan pada hasil estimasinya.

## **1.6 Sistematika Penulisan**

Penulisan Tugas Akhir ini disusun dalam lima bab berikut:

### **BAB I PENDAHULUAN**

Berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan, manfaat, dan sistematika penulisan Tugas Akhir.

### **BAB II TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini berisi tentang pengertian dan bentuk umum sistem linear waktu diskrit, proses reduksi model dengan Pemotongan Setimbang, algoritma filter Kalman, identifikasi variabel keadaan, dan persamaan konduksi panas.

### **BAB III METODOLOGI TUGAS AKHIR**

Gambaran umum bagaimana memperoleh hasil estimasi sistem tereduksi yang teridentifikasi pada model konduksi panas.

### **BAB IV ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Berisi analisa dan pembahasan mengenai penerapan algoritma filter Kalman dan identifikasi pada hasil estimasi sistem tereduksi dengan BT pada model distribusi konduksi panas pada batang logam.

### **BAB V KESIMPULAN**

Berisi kesimpulan dari hasil analisis Tugas Akhir.

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini diuraikan mengenai penelitian terdahulu serta landasan teori dan materi penunjang yang terkait dalam permasalahan Tugas Akhir antara lain sistem linear, reduksi model dengan Pemotongan Setimbang, algoritma filter Kalman, identifikasi variabel keadaan, dan model konduksi panas.

#### **2.1 Penelitian Terdahulu**

Penelitian–penelitian terkait yang pernah dilakukan sebelumnya yaitu sebagai berikut:

1. *Analisis Reduksi Model pada Sistem Linear Waktu Diskrit* [3]. Hasil penelitian ini memperlihatkan bahwa sistem awal dan sistem tereduksi menunjukkan kesamaan sifat dan semakin kecil variabel yang direduksi perbandingan error yang dihasilkan juga semakin kecil.
2. *Construction Of the Kalman Filter Algorithm On the Model Reduction*[10]. Dalam penelitian ini dikembangkan algoritma filter Kalman pada model tereduksi, namun terdapat kesulitan dalam membandingkan hasil estimasi pada sistem tereduksi dengan sistem awal dikarenakan dimensi yang berbeda.
3. *Identifikasi Variabel Pada Sistem Tereduksi Linear Waktu Kontinu*[16]. Dalam penelitian ini dilakukan identifikasi variabel keadaan yang bersesuaian untuk mengetahui hubungan antar variabel keadaan sehingga didapatkan perbandingan yang tepat antara sistem awal dan sistem tereduksinya.

## 2.2 Landasan Teori

### 2.2.1 Sistem Linear Waktu Diskrit

Diberikan suatu sistem linear waktu diskrit sebagai berikut[12].

$$\left. \begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

dengan

$x_k \in \mathbb{R}^n$  adalah variabel keadaan pada waktu  $k$ ,

$u_k \in \mathbb{R}^m$  adalah vektor masukan deterministik pada waktu  $k$ ,

$y_k \in \mathbb{R}^P$  adalah vektor keluaran pada waktu  $k$ ,

$A, B, C, D$  masing-masing adalah matriks-matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian dan diasumsikan  $A$  merupakan matriks non singular. Persamaan (2.1) dapat dinyatakan sebagai sistem  $(A, B, C, D)$ .

Fungsi transfer dari sistem  $(A, B, C, D)$  dinotasikan  $G_s$  dan didefinisikan sebagai berikut[12].

$$G_s = C(zI - A)^{-1}B + D$$

#### 2.2.1a Sifat-Sifat Sistem

Sifat-sifat dari suatu sistem meliputi tiga hal, diantaranya kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

##### a. Kestabilan dari Segi Nilai Karakteristik

*Definisi 2.1*[12]

*Diberikan sistem linear diskrit*

$$x_{k+1} = Ax_k \quad (2.2)$$

dengan  $x_k \in \mathbb{R}^n$  adalah variabel keadaan pada waktu  $k$  dan  $A$  adalah matriks konstan dengan ukuran yang bersesuaian. Misalkan  $x_e$  disebut titik setimbang.

- i. Titik setimbang  $x_e$  dikatakan stabil bila untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat  $\delta > 0$  sedemikian hingga untuk setiap

- solusi  $x_k$  yang memenuhi  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$  maka berlaku  $\|x_0 - x_e\| \leq \varepsilon$  untuk setiap  $k \geq 0$ .
- ii. Titik setimbang  $x_e$  dikatakan stabil asimtotik jika  $x_e$  stabil dan bila terdapat  $\delta_1 > 0$  sedemikian rupa sehingga untuk setiap solusi  $x_k$  yang memenuhi  $\|x_0 - x_e\| \leq \delta_1$  maka berlaku  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x_e\| = 0$ .

Berdasarkan Definisi 2.1 untuk menyelidiki kestabilan sistem  $(A, B, C, D)$ , maka syarat kestabilan sistem dapat ditentukan seperti pada teorema berikut.

*Teorema 2.1*[12]

*Sistem linear diskrit, seperti yang dinyatakan pada Persamaan (2.2), adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika  $|\lambda_i(A)| < 1$  untuk  $i = 1, \dots, n$  dengan  $\lambda_i(A)$  adalah nilai eigen matriks  $A$ . Sedangkan jika  $|\lambda_i(A)| \leq 1$ , maka sistem diskrit adalah stabil.*

### **b. Keterkendalian**

*Teorema 2.2*[12]

*Sistem diskrit yang diberikan pada Persamaan (2.1) terkendali jika dan hanya jika  $\text{rank}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n$ , dengan  $(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)$  disebut sebagai matriks keterkendalian.*

### **c. Keteramatan**

*Teorema 2.3*[12]

*Sistem diskrit yang didefinisikan pada Persamaan (2.1) teramat jika dan hanya jika  $\text{rank}(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T) = n$ , dengan  $(C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T)$  disebut sebagai matriks keteramatan.*



### 2.2.1b Gramian Keterkendalian dan Gramian Keteramatan

Diberikan sistem linear diskrit sebagai sistem  $(A, B, C, D)$ . Pada sistem  $(A, B, C, D)$  juga didefinisikan gramian keterkendalian  $W$ , dan gramian keteramatan  $M$ , yaitu:

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} A^k B B^T (A^T)^k$$

$$M = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C^T C A^k$$

Hubungan antara sifat kestabilan, keterkendalian dan keteramatan sistem dengan gramian keterkendalian  $W$ , dan gramian keteramatan  $M$ , dapat dinyatakan dalam teorema berikut.

*Teorema 2.4[10]*

*Diberikan sistem  $(A, B, C, D)$  yang stabil, terkendali dan teramati. Gramian keterkendalian  $W$ , dan gramian keteramatan  $M$ , masing-masing merupakan penyelesaian tunggal dan definit positif dari persamaan Lyapunov:*

$$A W A^T + B B^T - W = 0$$

$$A^T M A + C^T C - M = 0$$

Pada Teorema 2.4 sistem  $(A, B, C, D)$  yang stabil dimaksud adalah sistem stabil asimtotik. Sehingga, sistem  $(A, B, C, D)$  adalah sistem yang stabil asimtotik, terkendali, dan teramati.

### 2.2.2 Reduksi Model dengan Metode Pemotongan Setimbang

Reduksi model merupakan salah satu metode yang digunakan untuk penyederhanaan suatu sistem. Penyederhanaan

ini nantinya diharapkan dapat memperkecil orde sistem tanpa kesalahan yang signifikan. Metode reduksi model yang digunakan pada Tugas Akhir ini adalah metode Pemotongan Setimbang. Misalkan diberikan sebuah sistem  $(A, B, C, D)$  seperti pada Persamaan (2.1), dan diasumsikan sistem stabil, terkendali, dan teramati sehingga sistem  $(A, B, C, D)$  dapat dilakukan pemotongan setimbang. Berikut langkah-langkah pada metode pemotongan setimbang.

### 2.2.2a Sistem Setimbang

Sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  adalah sistem baru yang diperoleh dari sistem awal  $(A, B, C, D)$ . Sistem setimbang diperoleh dengan mentransformasikan sistem awal terhadap matriks transformasi  $T$  [13]. Matriks transformasi  $T$  didefinisikan sebagai matriks yang mentransformasikan sistem awal dengan variabel yang masih acak menjadi sistem setimbang dengan variabel yang teratur. Variabel yang memiliki pengaruh besar terhadap sistem terletak di atas, sedangkan variabel yang berpengaruh kecil terletak di bawah. Algoritma pembentukan matriks transformasi  $T$  adalah sebagai berikut:

- Diasumsikan sistem  $(A, B, C, D)$  stabil, terkendali dan teramati.
- Ditentukan gramian keterkendalian  $W$  dan gramian keteramatan  $M$  dari sistem.
- Ditentukan matriks  $\phi$  sedemikian hingga berlaku  $W = \phi^T \phi$ .
- Dikonstruksi matriks  $\phi M \phi^T$  kemudian diagonalisasi matriks tersebut sehingga berlaku  $\phi M \phi^T = U \Sigma^2 U^T$ , dimana
 
$$U = \text{matriks unitary}$$

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)} \text{ dengan } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$
- Didefinisikan matriks non singular  $T$  sebagai berikut.

$$T = \phi^T U \Sigma^{-1/2} \quad (2.3)$$

Setelah didapat matriks transformasi  $T$  sesuai Persamaan (2.3), selanjutnya akan dibentuk sistem setimbang sebagai berikut.

$$x_k = T \tilde{x}_k \quad (2.4)$$

dengan,

$x_k$  : variabel keadaan dari sistem awal  $(A, B, C, D)$

$\tilde{x}_k$  : variabel keadaan dari sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$

$T$  : matriks transformasi non singular berukuran  $n \times n$

Selanjutnya Persamaan (2.4) dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\tilde{x}_k = T^{-1} x_k \quad (2.5)$$

Untuk  $k = k + 1$  maka Persamaan (2.5) menjadi:

$$\tilde{x}_{k+1} = T^{-1} x_{k+1} \quad (2.6)$$

Jika sistem awal pada Persamaan (2.1) disubstitusikan pada Persamaan (2.6) maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\tilde{x}_{k+1} = T^{-1} (Ax_k + Bu_k) \quad (2.7)$$

Selanjutnya substitusi Persamaan (2.4) pada Persamaan (2.7) maka diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= T^{-1} (Ax_k + Bu_k) \\ &= T^{-1} AT \tilde{x}_k + T^{-1} B \tilde{u}_k \\ &= \tilde{A} \tilde{x}_k + \tilde{B} \tilde{u}_k \end{aligned}$$

Sedangkan untuk mendapatkan matriks  $\tilde{C}$  dan  $\tilde{D}$  dilakukan substitusi Persamaan (2.4) ke Persamaan (2.1), sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_k &= Cx_k + Du_k \\
&= C(T\tilde{x}_k) + \tilde{D}\tilde{u}_k \\
&= CT\tilde{x}_k + \tilde{D}\tilde{u}_k
\end{aligned}$$

Sehingga didapat:

$$\tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{B} = T^{-1}B, \tilde{C} = CT, \text{ dan } \tilde{D} = D$$

Sistem setimbang dapat dituliskan ke dalam bentuk:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_{k+1} &= \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\tilde{u}_k \\ \tilde{y}_k &= \tilde{C}\tilde{x}_k + \tilde{D}\tilde{u}_k \end{aligned} \right\}$$

Hubungan antara sistem setimbang dengan gramian keterkendalian dan gramian keteramatan sistem dapat dilihat pada definisi berikut.

*Definisi 2.2[10]*

*Sistem  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  disebut sistem setimbang dari sistem  $(A, B, C, D)$  jika sistem  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  mempunyai gramian keterkendalian  $\tilde{W}$ , dan gramian keteramatan  $\tilde{M}$ , yang merupakan solusi tunggal dari persamaan Lyapunov*

$$\tilde{A} \tilde{W} \tilde{A}^T + \tilde{B} \tilde{B}^T - \tilde{W} = 0$$

$$\tilde{A}^T \tilde{M} \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} - \tilde{M} = 0$$

*Sedemikian sehingga memenuhi*

$$\begin{aligned}
\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma &= \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \\
&\geq \sigma_n > 0
\end{aligned}$$

Menurut hasil yang telah diperoleh menunjukkan bahwa dengan mendefinisikan matriks transformasi  $T = \phi^T U \Sigma^{-1/2}$ , maka dari sistem  $(A, B, C, D)$  dapat dibentuk suatu sistem  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  yang mempunyai gramian keterkendalian  $\tilde{W}$  dan gramian keteramatan  $\tilde{M}$  yang sama dan merupakan matriks diagonal  $\Sigma$ . Oleh karena itu sistem  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  disebut sebagai sistem setimbang dari sistem  $(A, B, C, D)$ . Dan selanjutnya  $\Sigma$  disebut sebagai gramian kesetimbangan dari sistem  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ .

### 2.2.2b Reduksi Model dengan Pemotongan Setimbang

Setelah diperoleh sistem  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ , akan dilakukan pemotongan vektor keadaan (*state*) dari sistem yang bersesuaian dengan nilai singular Hankel yang kecil setelah diurutkan yaitu metode pemotongan setimbang. Sistem tereduksi didapat setelah menghilangkan variabel yang sulit dikendalikan dan diamati maupun yang berpengaruh kecil terhadap sistem. Variabel dengan pengaruh kecil adalah variabel keadaan yang juga bersesuaian dengan nilai singular hankel yang kecil. Nilai singular Hankel adalah representasi pengaruh *state* terhadap karakteristik *output* maupun *input* dalam sistem. Nilai singular hankel didapat dan disusun berdasarkan penyelesaian persamaan berikut.

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}$$

untuk

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$$

$$\lambda_i(WM) = \text{nilai eigen gramian } W \times M$$

*Teorema 2.5[14]*

*Diberikan sistem  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  yang stabil, terkendali,, teramati, dan setimbang dengan gramian  $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ,  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \dots \geq \sigma_n > 0$*

*Jika  $\sigma_r \geq \sigma_{r+1}$  maka sistem tereduksi dengan orde  $n$  juga akan stabil, terkendali, dan teramati serta memenuhi  $\|G_s - G_r\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \dots + \sigma_n)$ , dengan  $G_s$  dan  $G_r$  masing-masing adalah fungsi transfer sistem  $(A, B, C, D)$  dan sistem tereduksinya.*

Menurut Teorema 2.5 pemotongan variabel keadaan pada sistem setimbang dapat dilakukan dengan menentukan urutan nilai singular hankel dimana terjadi perubahan atau loncatan yang besar atau memilih nilai singular hankel ke- $r$  dimana  $\sigma_r > \sigma_{r+1}$ . Sehingga menghasilkan persamaan baru berukuran  $r$  yang dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$\tilde{x}_{r,k+1} = \tilde{A}_r \tilde{x}_k + \tilde{B}_r u_k \quad (2.8)$$

$$\tilde{y}_{r,k} = \tilde{C}_r \tilde{x}_k + \tilde{D}_r u_k \quad (2.9)$$

Selanjutnya sistem tereduksi yang terbentuk akan disebut sistem  $(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r)$ . Berdasarkan Persamaan (2.8) dan Persamaan (2.9), terlihat bahwa orde sistem tereduksi lebih kecil karena terjadi pemotongan variabel keadaan. Sistem  $(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, D)$  ini yang nantinya akan diestimasi dan kemudian diidentifikasi sehingga menghasilkan nilai estimasi dengan variabel keadaan yang tetap bersesuaian dengan sistem awalnya.

### 2.2.3 Algoritma Filter Kalman

Filter Kalman merupakan salah satu metode untuk mengestimasi variabel keadaan (*state*) dari sistem dinamik stokastik yang pertama kali diperkenalkan oleh Rudolf E. Kalman pada tahun 1960. Estimasi dengan menggunakan metode ini dilakukan dengan cara memprediksi variabel keadaan berdasarkan dinamika sistem dan data pengukuran[9]. Pada pemodelan sistem, tidak ada model matematika dari suatu sistem yang sempurna. Hal ini dapat disebabkan karena adanya faktor derau yang mempengaruhi sistem. Oleh sebab itu, perlu ditambahkan faktor stokastik pada sistem deterministik Persamaan (2.1) yang berupa derau sistem dan derau pengukuran, sehingga menjadi sistem dinamik stokastik berikut.

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k \\z_k &= Hx_k + v_k\end{aligned}\tag{2.10}$$

Dengan  $x_k$  merupakan variabel keadaan pada waktu  $k$ ,  $u_k$  adalah vektor masukan deterministik pada waktu  $k$ ,  $z_k$  adalah vektor pengukuran,  $w_k$  dan  $v_k$  masing-masing adalah derau sistem dan derau pengukuran pada waktu  $k$  yang merupakan besaran stokastik.  $A, B, H$  adalah matriks-matriks dengan ukuran yang bersesuaian. Derau pada sistem dan pengukuran diasumsikan berdistribusi Normal-Gauss dengan mean nol dan variansinya masing-masing adalah matriks semi-definit positif  $Q_k$  dan matriks definit positif  $R_k$ .

Algoritma filter Kalman terdiri dari 4 bagian. Bagian pertama dan kedua memberikan model sistem dan model pengukuran serta nilai awal (inisialisasi), sedangkan bagian ketiga dan keempat adalah tahap prediksi dan tahap koreksi. Pada tahap prediksi didefinisikan suatu estimasi keadaan  $\hat{x}_{k+1}^- \in R^n$  pada waktu  $k+1$  (*priori state estimate*), kemudian dihubungkan dengan kovariansi kesalahan  $P_{k+1}^-$  (*priori error covariance*). Sedangkan pada tahap koreksi memberikan koreksi berdasarkan pengukuran  $z_{k+1}$  pada waktu  $k+1$  untuk

menghasilkan estimasi  $\hat{x}_{k+1} \in R^n$  dan kovariansi kesalahan  $P_{k+1}$ , masing-masing disebut *posteriori state estimate* dan *posteriori error covariance*[15].

Algoritma filter Kalman secara lengkap dapat dituliskan sebagai berikut:

<ul style="list-style-type: none"> <li><b>Model Sistem dan Model Pengukuran</b></li> </ul>
$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k$ $z_k = Hx_k + v_k$ $x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_{x_0}); w_k \sim N(0, Q_k); v_k \sim N(0, R_k)$
<ul style="list-style-type: none"> <li><b>Inisialisasi</b></li> </ul>
$P_0 = P_{x_0} ; \hat{x}_0 = \bar{x}_0$
<ul style="list-style-type: none"> <li><b>Tahap Prediksi (<i>Time Update</i>)</b></li> </ul>
Kovariansi kesalahan $P_{k+1}^- = AP_k A^T + GQ_k G^T$ Estimasi $\hat{x}_{k+1}^- = A\hat{x}_k^- + Bu_k$
<ul style="list-style-type: none"> <li><b>Tahap Koreksi (<i>Measurement Update</i>)</b></li> </ul>
Kovariansi kesalahan $P_{k+1} = ((P_{k+1}^-)^{-1} + H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} H_{k+1})^{-1}$ Estimasi $\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1}^- + P_{k+1} H_{k+1}^T R_{k+1}^{-1} (z_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1}^-)$



Dari algoritma di atas hasil akhir dalam proses estimasi adalah *update* estimasi. Untuk menentukan kovarian sistem dan kovarian pengukuran diambil nilai yang sangat kecil. Sedangkan *noise* dari sistem dan pengukuran merupakan nilai acak.

#### 2.2.4 Identifikasi Variabel Keadaan

Identifikasi sistem dilakukan untuk mengidentifikasi variabel keadaan pada sistem tereduksi. Sebagaimana diketahui pada proses reduksi model dihasilkan suatu sistem tereduksi yang banyaknya variabel keadaan serta posisinya tidak bersesuaian dengan variabel pada sistem awal sehingga untuk membandingkan antara variabel keadaan pada sistem awal dengan sistem tereduksi akan mengalami kesulitan. Oleh sebab itu ada dua hal yang dapat dilakukan yaitu dengan membandingkan perilaku sistemnya atau melakukan identifikasi variabel keadaan supaya kemudian dapat ditentukan variabel keadaan yang bersesuaian antara sistem tereduksi dengan sistem awalnya. Identifikasi juga dapat dilakukan pada hasil estimasi sistem tereduksi melalui beberapa tahapan berikut[16]:

- (i) Mendapatkan penyelesaian sistem awal
- (ii) Mendapatkan sistem setimbang
- (iii) Mendapatkan identifikasi hasil estimasi sistem tereduksi

#### 2.2.5 Persamaan Konduksi Panas

Menurut hukum fisika, konduksi panas adalah aliran panas yang tidak diikuti oleh pergeseran media perantaranya dimana panas mengalir dari suhu yang lebih tinggi menuju ke suhu yang lebih rendah. Berlangsungnya konduksi panas melalui zat dapat diketahui oleh perubahan temperatur yang terjadi.

Misalkan suatu batang logam homogen dengan panjang  $L$ . Diasumsikan bahwa seluruh penampangnya dan salah satu ujung sisi batang terisolasi sempurna sehingga tidak ada panas yang dapat menembus sisi-sisi batang tersebut, serta pada sisi ujung yang lain diberi sumber panas yang dipertahankan konstan  $\bar{U}$  untuk semua ( $t > 0$ ) dengan koefisien konduksi

panas  $\alpha$ [13]. Dianggap pula bahwa temperatur yang mengalir sepanjang batang hanya dipengaruhi oleh posisi dan waktu. Semua posisi batang dinotasikan sebagai  $x$  sehingga terhadap panjang batang  $L$  bersifat  $0 < x < L$ . Untuk selanjutnya temperatur dinotasikan dengan  $U$  dan waktu dinotasikan dengan  $t$ . Jadi  $U$  adalah fungsi dari  $x$  dan  $t$  atau dapat ditulis dengan  $U(x, t)$  sebagai panas yang mengalir pada kawat pada saat  $t$  di posisi  $x$ .

Persamaan konduksi panas berdimensi satu dalam bentuk persamaan diferensial parsial didefinisikan sebagai berikut[17].

$$U_t = \alpha U_{xx}, (0 < x < L, t > 0) \quad (2.11)$$

$U_t$  adalah perubahan panas yang mengalir pada kawat terhadap waktu dan  $U_{xx}$  adalah perubahan panas yang mengalir pada kawat terhadap posisi sepanjang kawat dengan  $T$  adalah waktu hitungan total. Hal ini berarti bahwa persamaan konduksi panas tersebut mempunyai syarat awal dan syarat batas sebagai berikut[18]:

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= 0 ; 0 < x < L \\ U(0, t) &= \bar{U} ; 0 < t \leq T \\ U(l, t) &= 0 ; 0 < t \leq T \end{aligned}$$

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## **BAB III**

### **METODOLOGI PENELITIAN**

Pada bab ini diuraikan metode yang digunakan dalam Tugas Akhir secara rinci. Metodologi penelitian berguna sebagai acuan sehingga Tugas Akhir ini tersusun secara sistematis dan dapat mencapai tujuan yang telah ditetapkan sebelumnya. Proses pengerjaan terdiri dari beberapa tahap, yaitu studi literatur, analisis model awal, pembentukan sistem setimbang, reduksi model pada sistem stabil, mengkonstruksi algoritma filter kalman, melakukan identifikasi variabel keadaan hasil estimasi filter kalman pada sistem konduksi panas tereduksi, simulasi, analisa hasil, dan penarikan kesimpulan. Tahapan tersebut direpresentasikan dengan diagram alir yang dapat dilihat pada Lampiran A.

#### **3.1 Tahapan Penelitian**

Pada Tugas Akhir ini digunakan metode penelitian berdasarkan langkah-langkah sebagai berikut:

a. Studi Literatur

Dalam tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dan studi literatur dari beberapa buku, jurnal, penelitian, paper, maupun artikel dari internet mengenai referensi yang menunjang topik Tugas Akhir dan berhubungan dengan permasalahan konduksi panas serta metode reduksi model.

b. Analisis Model Awal

Setelah tahap studi literatur, tahap kedua yang dilakukan adalah analisa model awal sistem pada model konduksi panas. Analisa yang dimaksud meliputi analisa sifat dan perilaku sistem seperti analisa kestabilan, keterkendalian dan keteramatan, serta pembentukan gramian keterkendalian  $W$  dan gramian keteramatan  $M$  pada sistem tersebut.

c. Pembentukan Sistem Setimbang

Setelah gramian keterkendalian  $W$  dan gramian keteramatan  $M$  diketahui, langkah selanjutnya yaitu membentuk

sebuah matriks transformasi  $T$  yang diperoleh dari hasil konstruksi dan diagonalisasi matriks  $W$  dan matriks  $M$  yang non singular.

d. Reduksi Model Pada Sistem Stabil

Pada tahap ini dilakukan reduksi model pada sistem stabil dan setimbang dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang untuk menghasilkan model tereduksi dengan orde yang lebih kecil dengan membuang variabel keadaan (*state*) yang pengaruh atau kontribusinya terhadap sistem kurang signifikan, disini akan dibuktikan bahwa sifat-sifat sistem semula juga berlaku pada sistem yang telah direduksi.

e. Mengkonstruksi Algoritma Filter Kalman

Setelah didapat sistem baru hasil reduksi model konduksi panas yang berorde lebih kecil, selanjutnya dikonstruksi algoritma filter Kalman dari sistem awal dan sistem baru tersebut.

f. Melakukan Identifikasi Variabel Keadaan Hasil Estimasi Filter Kalman pada Sistem Konduksi Panas Tereduksi

Setelah Pembentukan algoritma filter Kalman, selanjutnya dilakukan estimasi dengan menggunakan filter Kalman pada sistem awal dan sistem tereduksi. Namun karena sistem awal dan sistem tereduksi memiliki orde yang berbeda maka dilakukan identifikasi variabel keadaan dari hasil estimasi sistem tereduksi agar diperoleh hubungan antar variabel keadaan yang bersesuaian dengan sistem awal sehingga dapat dilakukan perbandingan antara hasil estimasi keduanya.

g. Simulasi, Analisa, dan Penarikan Kesimpulan

Setelah hasil estimasi sistem awal dan sistem tereduksi yang telah teridentifikasi diperoleh, selanjutnya dilakukan simulasi hasil *error* keduanya terhadap sistem awal dengan menggunakan *software* MATLAB. Kemudian juga akan dilakukan analisa dari perbandingan simulasi hasil *error* tersebut. Setelah itu dapat ditarik kesimpulan dan pemberian saran untuk perbaikan dan pengembangan Tugas Akhir berikutnya.

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

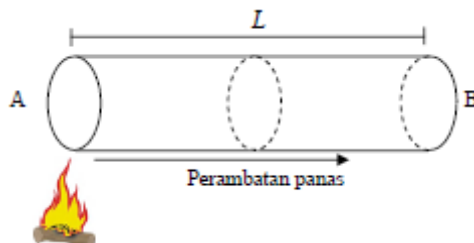
## **BAB IV**

### **ANALISIS DAN PEMBAHASAN**

Pada bab ini akan dijelaskan secara detail mengenai pemecahan masalah tentang bagaimana mengimplementasikan metode filter Kalman dan melakukan identifikasi pada hasil estimasi sistem yang tereduksi dengan metode Pemotongan Setimbang (*Balanced Truncation*/BT) serta penerapannya pada model distribusi konduksi panas pada batang logam. Hal ini bertujuan untuk mengetahui perbandingan hasil estimasi pada sistem awal dan sistem tereduksi. Langkah pertama yaitu pendiskritan model konduksi panas, karena masih berbentuk kontinu maka harus didiskritkan terlebih dahulu agar dapat dijalankan dalam bentuk pemrograman. Kemudian langkah selanjutnya adalah mereduksi sistem yang telah berbentuk diskrit tersebut. Setelah itu konstruksikan algoritma filter Kalman dari sistem awal dan sistem tereduksi, dan langkah terakhir adalah melakukan identifikasi pada hasil estimasi sistem tereduksi untuk memperoleh hubungan antar variabel keadaan yang bersesuaian dengan sistem awal sehingga hasil estimasi antara sistem awal dan sistem tereduksi dapat dibandingkan.

#### **4.1 Diskritisasi dan Pembentukan Sistem Awal Konduksi Panas**

##### **4.1.1 Diskritisasi Model Konduksi Panas pada Batang Logam**



**Gambar 4.1.** Perambatan Panas pada Batang

Model konduksi panas pada Persamaan (2.11) dituliskan dalam bentuk:

$$U_t = \alpha U_{xx}, (0 < x < L, t > 0)$$

dengan syarat awal dan syarat batas sebagai berikut[18]:

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= 0 ; 0 < x < L \\ U(0, t) &= \bar{U} ; 0 < t \leq T \\ U(l, t) &= 0 ; 0 < t \leq T \end{aligned}$$

Melibatkan variabel  $x$  dan  $t$  yang kontinu. Yang harus dilakukan adalah melakukan diskritisasi untuk mendapatkan model diskrit agar dapat diterapkan pada algoritma filter Kalman yaitu dengan menggunakan metode beda hingga. Pendiskritan pada persamaan konduksi panas digunakan metode beda hingga maju untuk pendiskritan  $U_t$  dan metode beda hingga pusat untuk pendiskritan  $U_{xx}$  yang disubstitusikan pada Persamaan (2.11) menjadi:

$$\begin{aligned} \frac{u_i^{k+1} - u_i^k}{\Delta t} &= \alpha \left( \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{(\Delta x)^2} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{u_i^{k+1}}{\Delta t} - \frac{u_i^k}{\Delta t} &= \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) \\ \Leftrightarrow \frac{u_i^{k+1}}{\Delta t} &= \frac{\alpha}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + \frac{u_i^k}{\Delta t} \\ \Leftrightarrow u_i^{k+1} &= \frac{\Delta t \alpha}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k) + u_i^k \end{aligned}$$

misal :  $\gamma = \frac{\Delta t \alpha}{(\Delta x)^2}$ , maka diperoleh:

$$\Leftrightarrow u_i^{k+1} = \gamma (u_{i-1}^k - 2u_i^k + u_{i+1}^k) + u_i^k$$



$$\Leftrightarrow u_i^{k+1} = \gamma u_{i-1}^k + (1 - 2\gamma)u_i^k + \gamma u_{i+1}^k$$

$i = 1, 2, 3, \dots, s$  didapat:

Untuk  $i = 1$ ,

$$u_1^{k+1} = \gamma u_0^k + (1 - 2\gamma)u_1^k + \gamma u_2^k$$

Untuk  $i = 2$ ,

$$u_2^{k+1} = \gamma u_1^k + (1 - 2\gamma)u_2^k + \gamma u_3^k$$

$\vdots$

Untuk  $i = s - 1$ ,

$$u_{s-1}^{k+1} = \gamma u_{s-2}^k + (1 - 2\gamma)u_{s-1}^k + \gamma u_s^k$$

Untuk  $i = s$ ,

$$u_s^{k+1} = \gamma u_{s-1}^k + (1 - 2\gamma)u_s^k + \gamma u_{s+1}^k \quad (4.1)$$

Selanjutnya dengan memilih  $x_k = (u_1^k, u_2^k, \dots, u_s^k)^T$  sebagai vektor keadaan, sistem yang berbentuk persamaan beda hingga pada Persamaan (4.1) dapat ditulis ke dalam bentuk sistem ruang keadaan yang invarian terhadap waktu sebagai berikut.

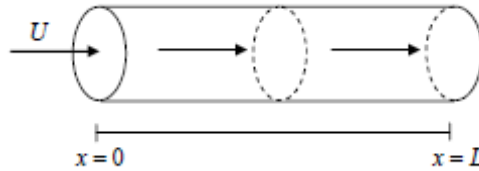
$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

Sehingga diperoleh bentuk umum dalam bentuk matriks hasil diskritisasi yaitu:



$$x_k = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix}^k ; \quad Bu_k = \begin{bmatrix} \gamma u_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \gamma u_{s+1} \end{bmatrix}$$

dimana  $s$  menunjukkan ukuran matriks keadaan dan  $s = f - 1$ .



**Gambar 4.2.** Isolasi Batang Secara Sempurna

Namun karena dalam Tugas Akhir ini diambil dua syarat kondisi batas yaitu Dirichlet dengan  $U(x, 0) = U_0 = \bar{U}$  untuk ujung logam sebelah kiri dan Neumann dengan  $U(L, t) = U_{s+1} = 0$  untuk ujung logam sebelah kanan (kondisi terisolasi sempurna), maka matriks  $B$  dan  $U_k$  menjadi:

$$Bu_k = \begin{bmatrix} \gamma u_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad U_k = u_0$$

#### 4.1.2 Sistem Awal Konduksi Panas

Berdasarkan hasil pendiskritan model konduksi panas sebelumnya,  $A$  adalah matriks keadaan berukuran  $s \times s$ .  $x_k$  adalah variabel keadaan sistem pada waktu  $k$ .  $B$  adalah matriks koefisien input berukuran  $s \times 1$ . Dalam Tugas Akhir ini diambil panjang batang dengan 7 satuan panjang didiskritkan menjadi sejumlah  $f$  grid yang homogen. Sebelumnya terlebih dahulu ditentukan jumlah grid yaitu  $f = 20$ , panjang grid posisi  $\Delta x = \frac{7}{f} = \frac{7}{20}$ , dan panjang grid waktu  $\Delta t = 1$ . Sedangkan untuk koefisien didapat dari parameter  $\gamma$ , dimana  $\gamma = \frac{\Delta t \alpha}{(\Delta x)^2}$  dengan  $\alpha = 0,05$  yang diambil dari koefisien konduktivitas logam aluminium[19]. Kestabilan sistem awal bergantung pada nilai  $\gamma$  yang memenuhi *Peclét number*  $0 \leq \gamma \leq 0,5$ . Pengukuran dilakukan dengan mengambil terlebih dahulu posisi ujung batang paling kanan yaitu posisi ke  $s$  dimana  $s = f - 1$ . Untuk posisi lain yang ingin diukur adalah tiap selang 5 bagian dari posisi sebelumnya dan seterusnya sampai pada posisi ujung batang paling kiri yaitu posisi ke  $s - 15$ . Dengan konstruksi seperti ini maka pendiskritan untuk panjang batang dengan 7 satuan panjang juga bisa dilakukan pada sejumlah  $17 \leq f \leq 22$  grid yang homogen. Pembatasan ini perlu dilakukan untuk menjamin sistem bersifat stabil, terkendali, dan teramat. Dengan demikian diperoleh sistem awal  $(A, B, C, D)$  yaitu:

$$A = \begin{bmatrix} 0,1837 & 0,4082 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0,4082 & 0,1837 & 0,4082 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0,4082 & 0,1837 & 0,4082 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0,4082 & 0,1837 & 0,4082 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0,4082 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4082 & 0,1837 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,4082 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

C adalah matriks pengukuran  $b \times s$  dimana  $b$  menunjukkan jumlah alat ukur yang akan dipasang. Matriks pengukuran C ditentukan untuk menunjukkan posisi data pengukuran yang diambil atau disimulasikan. Jika simulasi dilakukan dengan memasang 4 alat ukur, misal pada posisi  $(1, s - 15)$ ,  $(2, s - 10)$ ,  $(3, s - 5)$ , dan  $(4, s)$  maka matriks C berukuran  $4 \times s$  seperti ditunjukkan pada matriks berikut.

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Posisi dimana data pengukuran diambil diasumsikan bernilai karena variabel yang diukur koefisiennya 1. Jika dalam percobaan ini tidak dipasang alat ukur artinya tidak ada data pengukuran di posisi manapun maka matriks C berisi 0. Hal ini mengakibatkan metode filter Kalman yang akan diterapkan untuk perolehan hasil estimasi menjadi metode numerik biasa.

Dengan matriks  $D$ :

$$D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem awal  $(A, B, C, D)$  yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem awal  $(A, B, C, D)$  dapat ditentukan berdasarkan nilai  $|\lambda|$  dari eigen matriks  $A$ . Dengan menggunakan *software* MATLAB, terlihat bahwa nilai absolut dari semua eigen matriks  $A$  bernilai kurang dari 1 sehingga berdasarkan Teorema 2.1 sistem awal  $(A, B, C, D)$  bersifat stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem awal  $(A, B, C, D)$  dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian  $Mc$ . Dengan menggunakan *software* MATLAB, diperoleh bahwa rank matriks keterkendalian sistem awal  $(A, B, C, D)$ , rank  $Mc = 19$ . Karena dimensi rank matriks keterkendalian sama dengan rank

dimensi matriks  $A$ , maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem awal  $(A, B, C, D)$  terkendali.

Keteramatan sistem awal  $(A, B, C, D)$  dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan  $Mo$ . Dengan menggunakan *software* MATLAB, diperoleh bahwa rank matriks keteramatan sistem awal  $(A, B, C, D)$ , rank  $Mo = 19$ . Karena dimensi rank matriks keteramatan sama dengan rank dimensi matriks  $A$ , maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem awal  $(A, B, C, D)$  teramati.

Kemudian langkah selanjutnya akan dikonstruksi gramian keterkendalian dan gramian keteramatan sistem awal. Gramian diperoleh berdasarkan Teorema 2.4 dengan menggunakan *software* MATLAB, sedemikian hingga didapatkan gramian keterkendalian ( $W$ ) dan gramian keteramatan ( $M$ ) sistem awal.

## 4.2 Reduksi Model

### 4.2.1 Pembentukan Sistem Setimbang

Sistem setimbang diperoleh dengan mentransformasikan matriks  $T$  pada sistem awal yang stabil, terkendali dan teramati. Algoritma pembentukan matriks  $T$  dengan hasil yang diperoleh menggunakan *software* MATLAB adalah sebagai berikut:

- Sistem awal  $(A, B, C, D)$  konduksi panas yang diperoleh sebelumnya terbukti bersifat stabil, terkendali, dan teramati.
- Telah dikonstruksikan sebelumnya gramian keterkendalian ( $W$ ) dan gramian keteramatan ( $M$ ) dari sistem awal konduksi panas.
- Ditentukan matriks  $\phi$  sedemikian hingga berlaku  $W = \phi^T \phi$  karena  $W$  memuat sifat gramian yaitu  $W = W^T$ . Maka  $\phi$  adalah matriks segitiga atas dan  $\phi^T$  adalah matriks segitiga bawah, keduanya berukuran  $s \times s$ .
- Dikonstruksikan matriks  $\phi M \phi^T$  dan dilakukan diagonalisasi pada  $\phi M \phi^T$  sedemikian hingga berlaku  $\phi M \phi^T = U \Sigma^2 U^T$ , dengan  $U$  adalah matriks unitary (matriks yang dibangun oleh vektor eigen  $\phi M \phi^T$ ) dan  $\Sigma =$

$diag(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ ,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(WM)}$  dengan  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ .

Untuk mendapatkan matriks  $U$  dan  $\Sigma^2$  dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

- (i) Tentukan nilai eigen  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  dari matriks hasil operasi  $\phi M \phi^T$ .
- (ii) Tentukan vektor eigen ( $V$ ) dari matriks hasil operasi  $\phi M \phi^T$ . Karena matriks  $U$  berukuran  $s \times s$  adalah matriks yang dibangun oleh vektor eigen  $\phi M \phi^T$ , maka  $U = V$ .
- (iii)  $\Sigma^2$  adalah  $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  dari matriks hasil operasi  $\phi M \phi^T$ , sehingga dengan menarik akar dari  $\Sigma^2$  akan diperoleh  $\Sigma$  yang berupa matriks diagonal berukuran  $s \times s$ .
- (iv) Setelah didapatkan matriks  $\phi$ , matriks  $U$ , dan matriks  $\Sigma$  maka selanjutnya dapat dikonstruksi matriks transformasi  $T$  dimana  $T = \phi^T U \Sigma^{-\frac{1}{2}}$ .

Setelah didapat matriks  $T$  yang berukuran  $s \times s$ , transformasikan dengan sistem awal dimana  $\tilde{A} = T^{-1}AT$ ,  $\tilde{B} = T^{-1}B$ ,  $\tilde{C} = CT$ , dan  $\tilde{D} = D$  sehingga diperoleh sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ .

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0,98494 & -0,0005 & -0,0389 & -0,002 & -0,008 & 0,0188 & -0,005 & 0,00018 & \dots & 1,E-07 \\ -0,0217 & 0,97447 & -0,081 & -0,007 & -0,008 & 0,0231 & 0,0108 & -0,0008 & \dots & -6,E-07 \\ 0,0414 & 0,10748 & 0,67754 & 0,0724 & -0,166 & 0,3354 & -0,013 & 0,00593 & \dots & -2,E-06 \\ 0,00874 & 0,01709 & -0,2119 & 0,9246 & 0,0159 & -0,06 & 0,0528 & 0,00963 & \dots & 5,E-06 \\ 0,00836 & 0,01638 & -0,1584 & -0,136 & -0,819 & -0,428 & 0,0286 & 0,00706 & \dots & -2,E-06 \\ 0,0195 & 0,03879 & -0,3112 & -0,276 & 0,4417 & -0,054 & 0,0362 & 0,01851 & \dots & -7,E-06 \\ -0,0004 & -0,0026 & -0,0539 & -0,017 & -0,097 & 0,2796 & 0,749 & -0,0576 & \dots & -2,E-05 \\ 6,45E-06 & 0,00031 & 0,01414 & 0,0025 & 0,022 & -0,061 & 0,1438 & 0,88776 & \dots & -2E-04 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1,30E-13 & 3,06E-10 & 6,16E-09 & 6,E-09 & 1,E-08 & -3,E-08 & -2,E-07 & -2,E-07 & \dots & -0,102 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -0,123 & -0,087 & 0,1578 & 0,0389 & 0,0368 & \dots & 8,E-11 & -2,E-10 \end{bmatrix}^T$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} -0,114 & -0,056 & -0,158 & -0,007 & -0,039 & 0,0908 & -0,008 & \dots & -2E-08 \\ -0,042 & 0,0574 & -3E-04 & 0,0228 & -5E-04 & -0,011 & -0,04 & \dots & 4E-09 \\ -0,016 & 0,0331 & 0,0115 & -0,037 & 0,0002 & 0,0072 & 0,0035 & \dots & 9E-07 \\ -0,002 & 0,0052 & 0,0022 & -0,009 & 6E-05 & 0,0021 & 0,0048 & \dots & 2E-05 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  dapat ditentukan berdasarkan nilai  $|\lambda|$  dari eigen matriks  $\tilde{A}$ . Dengan menggunakan *software* MATLAB, terlihat bahwa nilai absolut dari semua eigen matriks  $\tilde{A}$  bernilai kurang dari 1 sehingga berdasarkan Teorema 2.1 sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  bersifat stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian  $\tilde{M}c$ . Dengan menggunakan *software* MATLAB, diperoleh bahwa rank matriks keterkendalian sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ , rank  $\tilde{M}c = 19$ . Karena dimensi rank matriks keterkendalian sama dengan rank dimensi matriks  $\tilde{A}$ , maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  terkendali.

Keteramatan sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan  $\tilde{M}o$ . Dengan menggunakan *software* MATLAB, diperoleh bahwa rank matriks keteramatan sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ , rank  $\tilde{M}o = 19$ . Karena dimensi rank matriks keteramatan sama dengan rank dimensi matriks  $A$ , maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  teramati.

Kemudian langkah selanjutnya akan dikonstruksi gramian keterkendalian dan gramian keteramatan sistem setimbang. Gramian diperoleh berdasarkan Teorema 2.4 dengan menggunakan *software* MATLAB, sedemikian hingga



didapatkan gramian keterkendalian ( $\tilde{W}$ ) dan gramian keteramatan ( $\tilde{M}$ ) dari sistem setimbang.

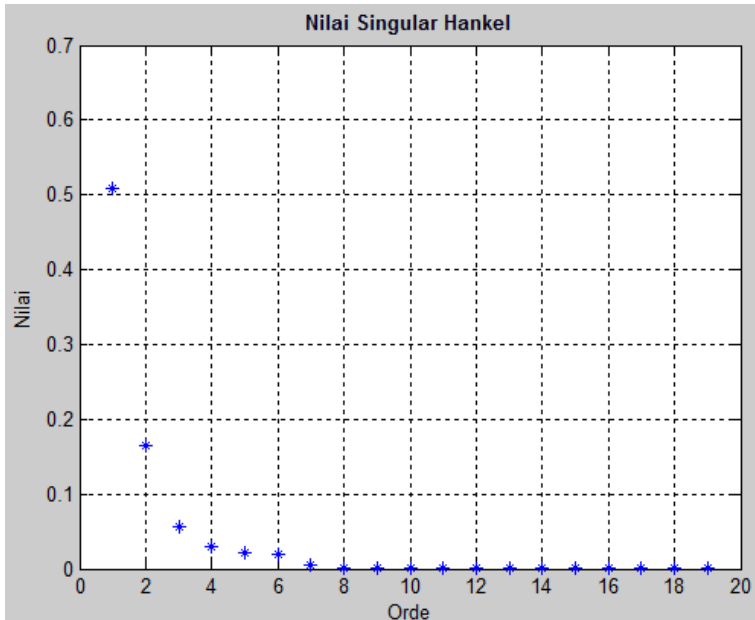
Dari hasil yang diperoleh, terlihat bahwa nilai  $\tilde{W} = \tilde{M}$  sehingga memenuhi syarat sistem setimbang. Hal ini berarti  $\tilde{W} = \tilde{M} = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  dengan  $|\sigma_i|$  adalah nilai singular Hankel. Dengan demikian didapatkan nilai singular Hankel seperti yang ditampilkan oleh Tabel 4.1 di bawah ini.

**Tabel 4.1.** Nilai Singular Hankel

$i$	$ \sigma_i $
1	0,50879
2	0,16424
3	0,05654
4	0,02909
5	0,02108
6	0,01942
7	0,00434
8	0,00087
9	0,00036
10	0,00018
11	0,00014
12	0,00011
13	8,10E-06
14	2,95E-06
15	1,45E-06
16	9,08E-07
17	8,71E-08
18	1,01E-08
19	7,49E-09

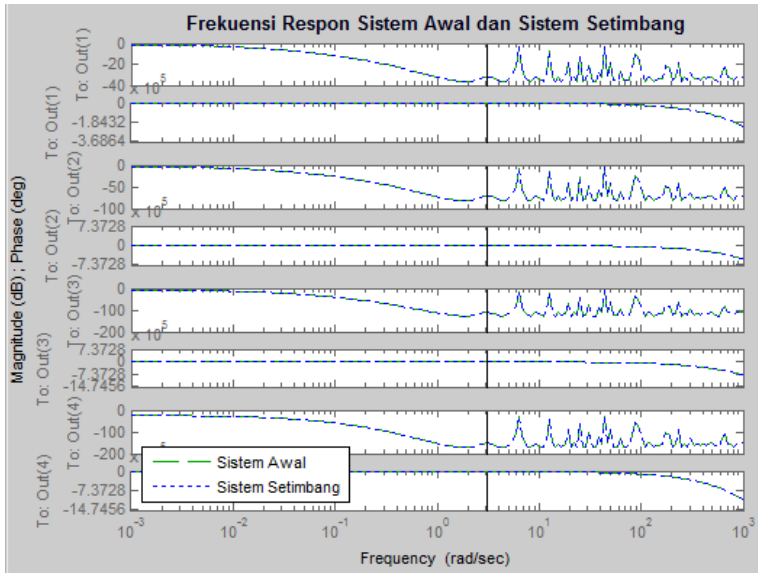
Berdasarkan Tabel 4.1, dapat dilihat bahwa semua nilai singular Hankel adalah positif dan determinan dari nilai singular Hankel tidak sama dengan 0.

Nilai singular Hankel juga dapat ditampilkan dengan grafik, yang ditunjukkan pada Gambar 4.3 di bawah ini.



**Gambar 4.3.** Nilai Singular Hankel

Dan berikut merupakan grafik frekuensi respon sistem awal  $(A, B, C, D)$  dan sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  yang ditunjukkan pada Gambar 4.4 di bawah ini.



**Gambar 4.4.** Frekuensi Respon Sistem Awal ( $A, B, C, D$ ) dan Sistem Setimbang ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ )

Berdasarkan pada Gambar 4.4 terlihat bahwa frekuensi respon antara sistem awal ( $A, B, C, D$ ) dan sistem setimbang ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ) memiliki kesamaan pada rentang frekuensi yang telah ditentukan.

Sebelum sistem setimbang ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ) direduksi dengan menggunakan metode Pemotongan Setimbang (*Balanced Truncation/BT*), terlebih dahulu tinjau kembali syarat dimana orde suatu sistem dapat direduksi yang sesuai dengan Teorema 2.5. Dengan demikian diperoleh hasil dari syarat, orde berapa saja yang dapat direduksi dengan BT. Ditampilkan oleh Tabel 4.2 di bawah ini.

**Tabel 4.2.** Syarat Besar Orde Tereduksi dengan BT

Orde Reduksi	$\ G_s - Gr\ _\infty$	$2\sum\sigma_{r+1}$	Keterangan
11	0,0001	0,0002	Memenuhi Teorema
10	0,0005	0,0005	Memenuhi Teorema
8	0,0005	0,0016	Memenuhi Teorema
7	0,0016	0,0033	Memenuhi Teorema
6	0,0071	0,0120	Memenuhi Teorema
5	0,0238	0,0509	Memenuhi Teorema
4	0,0231	0,0930	Memenuhi Teorema
3	0,0534	0,1512	Memenuhi Teorema
2	0,0792	0,2643	Memenuhi Teorema
1	0,3003	0,5928	Memenuhi Teorema

Berdasarkan Tabel 4.2 dapat disimpulkan bahwa sistem awal  $(A, B, C, D)$  dapat direduksi dengan BT menjadi bentuk orde 1,2,3,4,5,6,7,8,10, dan 11. Sedangkan dalam Tugas Akhir ini akan dibahas simulasi bentuk orde 10.

#### 4.2.2 Reduksi Orde 10

Setelah sistem setimbang diperoleh, akan dilakukan pemotongan variabel sehingga orde sistem tereduksi. Pemotongan sistem ditinjau berdasarkan loncatan nilai singular Hankel yang paling besar sesuai dengan besar orde yang dikehendaki. Dengan bentuk orde 10 sistem setimbang  $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$  dapat direduksi menjadi sistem tereduksi  $(\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r)$  sebagai berikut:

$$\tilde{A}_r = \begin{bmatrix} 0,984942 & -0,00052 & -0,03888 & -0,00154 & -0,00819 & 0,01876 & -0,00503 & 0,000182 & 0,000703 & -0,00023 \\ -0,02167 & 0,974473 & -0,08101 & -0,00671 & -0,00752 & 0,023074 & 0,010781 & -0,00076 & -0,00307 & 0,001094 \\ 0,041399 & 0,107479 & 0,677541 & 0,072372 & -0,16618 & 0,335409 & -0,01307 & 0,005927 & -0,0025 & -0,00023 \\ 0,008745 & 0,017089 & -0,21185 & 0,92456 & 0,015885 & -0,06023 & 0,05283 & 0,009634 & -0,01418 & -0,00186 \\ 0,008358 & 0,016382 & -0,15841 & -0,13551 & -0,81881 & -0,42778 & 0,028617 & 0,007057 & -0,00233 & -0,00073 \\ 0,019504 & 0,038794 & -0,31123 & -0,27596 & 0,441713 & -0,05418 & 0,036234 & 0,018508 & 7,30E-05 & -0,00234 \\ -0,00039 & -0,00257 & -0,05394 & -0,01698 & -0,09741 & 0,279607 & 0,748984 & -0,0576 & 0,149901 & -0,01456 \\ 6,45E-06 & 0,000309 & 0,014136 & 0,002492 & 0,021966 & -0,06118 & 0,14383 & 0,887756 & -0,01701 & -0,04081 \\ -4,E-05 & -0,00041 & -0,01535 & -0,00278 & -0,02469 & 0,068595 & -0,14755 & 0,263502 & 0,419029 & 0,292628 \\ 7,38E-06 & 6,57E-05 & 0,002019 & 0,000474 & 0,003311 & -0,0093 & 0,012594 & -0,0302 & 0,394665 & -0,75392 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_r = \begin{bmatrix} -0,12294 \\ -0,08749 \\ 0,157774 \\ 0,038876 \\ 0,036816 \\ 0,084355 \\ 0,000226 \\ -0,00046 \\ 0,000375 \\ -4, \text{E-}05 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_r = \begin{bmatrix} -0,11401 & -0,05618 & -0,1577 & -0,00723 & -0,03876 & 0,090816 & -0,0082 & 0,000671 & -0,00038 & -8, \text{E-}05 \\ -0,04212 & 0,057443 & -0,00035 & 0,022811 & -0,00054 & -0,01137 & -0,04012 & -0,00023 & 0,01091 & -0,00184 \\ -0,01568 & 0,03315 & 0,011509 & -0,03749 & 0,000192 & 0,007218 & 0,003511 & 0,001688 & -0,00442 & -0,0022 \\ -0,00222 & 0,005215 & 0,002174 & -0,00857 & 6,20 \text{E-}05 & 0,002063 & 0,004826 & 0,011335 & 0,002753 & 0,000523 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_r = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan diselidiki sifat dari sistem tereduksi  $(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r, \bar{D}_r)$  yang berupa sifat kestabilan, keterkendalian, dan keteramatan.

Kestabilan dari sistem tereduksi  $(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r, \bar{D}_r)$  dapat ditentukan berdasarkan nilai  $|\lambda|$  dari eigen matriks  $\bar{A}_r$ . Dengan menggunakan *software* MATLAB, terlihat bahwa nilai absolut dari semua eigen matriks  $\bar{A}_r$  bernilai kurang dari 1 sehingga berdasarkan Teorema 2.1 sistem tereduksi  $(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r, \bar{D}_r)$  bersifat stabil asimtotik.

Keterkendalian sistem tereduksi  $(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r, \bar{D}_r)$  dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keterkendalian  $\bar{M}\bar{C}_r$ .

$$\bar{M}\bar{C}_r = \begin{bmatrix} -0,12294 & -0,12595 & -0,12882 & -0,13141 & -0,12768 & -0,12543 & -0,12142 & -0,11819 & -0,1146 & -0,11144 \\ -0,08749 & -0,09396 & -0,0987 & -0,10075 & -0,09318 & -0,08725 & -0,07867 & -0,07117 & -0,06322 & -0,05603 \\ 0,157774 & 0,117388 & 0,062077 & -0,01733 & -0,01511 & -0,03676 & -0,03222 & -0,03662 & -0,03294 & -0,03249 \\ 0,038876 & -0,00455 & -0,02956 & -0,03708 & -0,03729 & -0,03375 & -0,02841 & -0,02232 & -0,01604 & -0,00996 \\ 0,036816 & -0,09895 & 0,083824 & -0,04221 & 0,028408 & -0,01378 & 0,009542 & -0,00427 & 0,003335 & -0,00124 \\ 0,084355 & -0,05393 & -0,0818 & 0,023903 & -0,01192 & 0,02151 & 0,007079 & 0,016148 & 0,009762 & 0,011228 \\ 0,000226 & 0,011354 & -0,0024 & -0,03619 & -0,01627 & -0,01555 & -0,001 & 0,004235 & 0,01121 & 0,013772 \\ -0,00046 & -0,00244 & 0,002179 & 0,009214 & 0,000446 & -0,00091 & -0,00555 & -0,00585 & -0,0065 & -0,00511 \\ 0,000375 & 0,002379 & -0,00436 & -0,00892 & 0,006563 & 0,003186 & 0,007354 & 0,001754 & 0,001959 & -0,00233 \\ -3,98 \text{E-}05 & -0,00014 & 0,001661 & -0,00193 & -0,00322 & 0,004951 & -0,00299 & 0,00519 & -0,00324 & 0,003398 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan *software* MATLAB, diperoleh bahwa rank matriks keterkendalian sistem tereduksi  $(\bar{A}_r, \bar{B}_r, \bar{C}_r, \bar{D}_r)$ ,

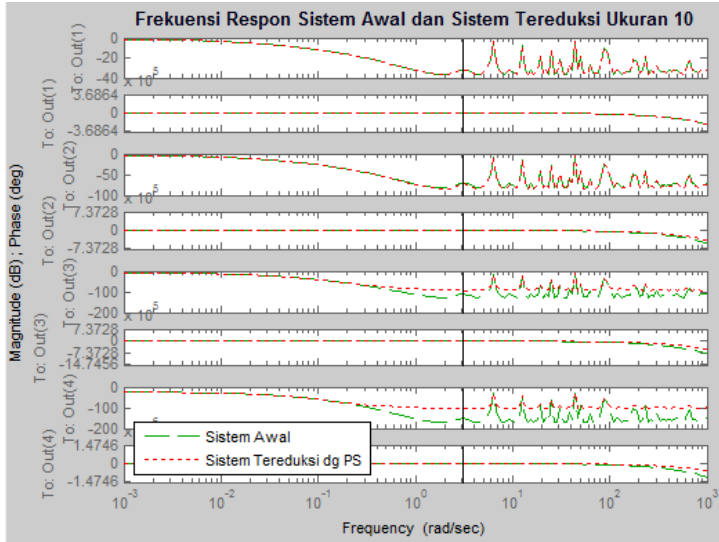
rank  $\widetilde{M}\widetilde{C}_r = 10$ . Karena dimensi rank matriks keterkendalian sama dengan rank dimensi matriks  $\widetilde{A}_r$ , maka berdasarkan Teorema 2.2 sistem tereduksi  $(\widetilde{A}_r, \widetilde{B}_r, \widetilde{C}_r, \widetilde{D}_r)$  terkendali.

Keteramatan sistem tereduksi  $(\widetilde{A}_r, \widetilde{B}_r, \widetilde{C}_r, \widetilde{D}_r)$  dapat ditentukan berdasarkan *rank* dari matriks keteramatan  $\widetilde{M}\widetilde{O}_r$ .

$$\widetilde{M}\widetilde{O}_r = \begin{bmatrix} -0,114 & -0,056 & -0,158 & -0,007 & -0,039 & 0,0908 & -0,008 & 0,0007 & -4E-04 & -8,E-05 \\ -0,042 & 0,0574 & -3E-04 & 0,0228 & -5E-04 & -0,011 & -0,04 & -2E-04 & 0,0109 & -0,002 \\ -0,016 & 0,0331 & 0,0115 & -0,037 & 0,0002 & 0,0072 & 0,0035 & 0,0017 & -0,004 & -0,002 \\ -0,002 & 0,0052 & 0,0022 & -0,009 & 6,E-05 & 0,0021 & 0,0048 & 0,0113 & 0,0028 & 0,0005 \\ -0,116 & -0,069 & -0,118 & -0,037 & 0,1001 & -0,047 & -0,002 & 0,0014 & -7E-04 & -1E-04 \\ -0,043 & 0,056 & -0,002 & 0,0246 & -6E-04 & -0,011 & -0,03 & 0,005 & -0,003 & 0,0052 \\ -0,016 & 0,0332 & 0,0113 & -0,036 & 0,0002 & 0,0067 & 0,0021 & 1,E-05 & -0,002 & 0,0003 \\ -0,002 & 0,0052 & 0,0022 & -0,008 & 5,E-05 & 0,002 & 0,0045 & 0,0105 & 0,002 & -1E-04 \\ -0,118 & -0,081 & -0,063 & -0,043 & -0,082 & -0,082 & -7E-04 & -1,E-05 & 5,E-06 & -6,E-05 \\ -0,043 & 0,0544 & -0,005 & 0,0258 & -3E-04 & -0,01 & -0,02 & 0,0053 & -0,004 & -0,004 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -0,017 & 0,033 & 0,0095 & -0,027 & 3,E-05 & 0,0043 & -0,004 & -4E-04 & -3E-04 & 0,0004 \\ -0,002 & 0,0054 & 0,002 & -0,007 & 6,E-05 & 0,0017 & 0,0028 & 0,0054 & 0,0008 & -8,E-05 \\ -0,097 & -0,066 & 0,03 & -0,002 & -0,003 & 0,004 & -0,004 & 0,0002 & -0,001 & -1E-04 \\ -0,048 & 0,0414 & -0,015 & 0,0206 & 0,0004 & -0,005 & 0,0053 & -9E-04 & -1E-04 & -0,002 \\ -0,017 & 0,0329 & 0,0091 & -0,026 & 1,E-04 & 0,004 & -0,004 & -4E-04 & -3E-04 & -2E-04 \\ -0,002 & 0,0054 & 0,002 & -0,007 & 4,E-05 & 0,0016 & 0,0024 & 0,0048 & 0,0007 & 6,E-05 \\ -0,093 & -0,06 & 0,0293 & 0,0006 & 0,0012 & 0,0067 & -0,004 & 0,0003 & -0,001 & -3E-04 \\ -0,048 & 0,039 & -0,015 & 0,0189 & -7,E-05 & -0,005 & 0,0057 & -0,001 & -3E-04 & 0,0012 \\ -0,018 & 0,0327 & 0,0086 & -0,025 & 2,E-05 & 0,0037 & -0,004 & -4E-04 & -5E-04 & 0,0002 \\ -0,002 & 0,0054 & 0,002 & -0,007 & 6,E-05 & 0,0015 & 0,0021 & 0,0043 & 0,0007 & -5,E-05 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan *software* MATLAB, diperoleh bahwa rank matriks keteramatan sistem tereduksi  $(\widetilde{A}_r, \widetilde{B}_r, \widetilde{C}_r, \widetilde{D}_r)$ , rank  $\widetilde{M}\widetilde{O}_r = 10$ . Karena dimensi rank matriks keteramatan sama dengan rank dimensi matriks  $\widetilde{A}_r$ , maka berdasarkan Teorema 2.3 sistem tereduksi  $(\widetilde{A}_r, \widetilde{B}_r, \widetilde{C}_r, \widetilde{D}_r)$  teramat.

Dan berikut merupakan frekuensi respon antara sistem awal  $(A, B, C, D)$  dengan sistem tereduksi  $(\widetilde{A}_r, \widetilde{B}_r, \widetilde{C}_r, \widetilde{D}_r)$  orde 10 yang ditunjukkan pada Gambar 4.5 di bawah ini.



**Gambar 4.5.** Frekuensi Respon Sistem Awal ( $A, B, C, D$ ) dan Sistem Tereduksi ( $\tilde{A}_r, \tilde{B}_r, \tilde{C}_r, \tilde{D}_r$ ) Orde 10 dengan BT terhadap Output

Berdasarkan pada Gambar 4.5 terlihat bahwa frekuensi respon antara sistem awal ( $A, B, C, D$ ) dan sistem setimbang ( $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ ) cenderung sama pada saat frekuensi rendah sedangkan pada saat frekuensi tinggi cenderung berbeda, pada rentang frekuensi yang telah ditentukan.

### 4.3 Implementasi Metode Filter Kalman pada Model Konduksi Panas

#### 4.3.1 Estimasi Sistem Awal Model Konduksi Panas

Model pada Persamaan (2.10) digunakan untuk sistem yang terisolasi secara sempurna pada salah satu sisi batang logam. Sedangkan pada kenyataannya tidak demikian, artinya terdapat perpindahan panas antara batang logam dan udara, yang disebut dengan *noise*.

Pada algoritma filter Kalman, dilakukan pendiskritan dan penambahan *noise* model sistem konduksi panas pada batang logam sehingga diperoleh model stokastik:

model sistem

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k \quad (4.2)$$

dan model pengukurannya adalah

$$z_k = Cx_k + v_k$$

Dalam hal ini Persamaan (4.2) pada algoritma filter Kalman didapat dari

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) + Gw_k$$

dengan  $f(x_k, u_k)$  adalah model hasil pendiskritan pada Persamaan (2.10).

$w_k$  adalah *noise* sistem yang timbul akibat proses pembentukan model konduksi panas yang tidak sempurna, sedangkan  $v_k$  merupakan *noise* pengukuran. Penambahan *noise* ini dilakukan dengan membangkitkan sejumlah bilangan acak dari komputer. *Noise* yang dibangkitkan memiliki sebaran normal dan mean nol. Variansi dari *noise* diasumsikan konstan yaitu  $Q_k = 0,01$  dan  $R_k = 0,01$ , dimana  $Q_k$  merupakan variansi *noise* sistem dan  $R_k$  merupakan variansi *noise* pengukuran. Nilai estimasi awal  $x_k$  adalah  $\bar{x}_0 = 0$  yaitu suhu pada semua posisi batang logam terisolasi sempurna saat  $k = 0$  yang berukuran  $s \times 1[20]$  dan kovariansi awal  $P_0 = P_{x0} = 0,01$ .  $u_k$  adalah variabel input berdasarkan nilai awal yang diberikan dari kondisi batas yang telah ditentukan yaitu dengan suhu  $100^\circ\text{C}$  pada ujung sebelah kiri.

$G$  adalah matriks gangguan inputan berukuran  $s \times s$  yang menyatakan besarnya gangguan panas yang diberikan. Simulasi dilakukan dengan memberikan gangguan berupa matriks identitas berukuran  $s \times s$ .



Jumlah iterasi dilakukan sebanyak  $T = 100$ , dengan demikian didapatkan hasil estimasi dari sistem awal  $\hat{x}$  yang ditampilkan oleh Tabel 4.3 berikut.

**Tabel 4.3.** Hasil Estimasi Sistem Awal

$\hat{x}$										
0	1	2	3	4	5	...	97	98	99	100
0	40,82	48,31	56,5	60,5	64,19	...	91,17	91,21	91,25	91,29
0	-0,008	16,68	22,81	30,04	34,54	...	82,45	82,52	82,59	82,67
0	-0,007	-0,014	6,871	10,62	15,34	...	73,91	74,07	74,14	74,22
0	-0,065	0,107	0,149	2,789	4,831	...	65,75	65,84	65,9	66,08
0	-0,007	-0,011	0,068	0,078	1,148	...	57,82	58,04	58,17	58,32
0	-0,008	0,023	0,037	0,018	0,038	...	50,43	50,62	50,81	51,01
0	-0,004	0,037	-0,003	0,048	-0,015	...	43,53	43,75	43,95	44,19
0	-0,003	0,015	0,079	-0,028	0,031	...	37,23	37,45	37,64	37,88
0	-0,031	0,195	-0,105	0,075	-0,071	...	31,51	31,66	31,88	32,24
0	-0,003	0,012	0,08	-0,014	0,051	...	26,37	26,6	26,79	27,04
0	-0,004	0,044	-0,009	0,083	0,031	...	21,8	22,04	22,25	22,51
0	0,018	0,011	0,066	0,089	0,111	...	17,83	18,05	18,26	18,51
0	0,016	0,071	0,042	0,153	0,199	...	14,35	14,58	14,8	14,99
0	0,144	0,027	0,179	0,332	0,201	...	11,4	11,66	11,75	12,03
0	0,016	0,07	0,046	0,15	0,212	...	8,779	8,967	9,14	9,278
0	0,018	0,012	0,069	0,096	0,119	...	6,554	6,708	6,823	6,977
0	-1E-04	0,035	0,02	0,061	0,093	...	4,622	4,742	4,82	4,938
0	-1E-04	0,018	0,071	0,027	0,039	...	2,942	2,994	3,076	3,135
0	-0,001	0,128	0,013	-0,032	0,111	...	1,361	1,465	1,456	1,534

#### 4.3.2 Estimasi Sistem Tereduksi Model Konduksi Panas

Untuk kasus sistem tereduksi, dilakukan juga penambahan *noise* model sistem konduksi panas batang logam.

Dengan model stokastik sistem dan pengukuran yang sama substitusi  $A$  dengan  $\tilde{A}_r$  yang merupakan matriks keadaan berukuran  $n \times n$ , substitusi  $B$  dengan  $\tilde{B}_r$  yang merupakan matriks koefisien input berukuran  $n \times 1$ , dan substitusi  $C$  dengan  $\tilde{C}_r$  yang merupakan matriks pengukuran  $b \times n$ , dimana ketiganya merupakan hasil reduksi dari sistem awal serta  $n$  menunjukkan ukuran matriks tereduksi.

$w_k$  adalah *noise* sistem yang timbul akibat proses pembentukan model konduksi panas yang tidak sempurna, sedangkan  $v_k$  merupakan *noise* pengukuran. Penambahan *noise* ini dilakukan dengan membangkitkan sejumlah bilangan acak

dari komputer. *Noise* yang dibangkitkan memiliki sebaran normal dan mean nol. Variansi dari *noise* diasumsikan konstan yaitu  $Q_k = 0,01$  dan  $R_k = 0,01$ , dimana  $Q_k$  merupakan variansi *noise* sistem dan  $R_k$  merupakan variansi *noise* pengukuran. Nilai estimasi awal  $x_k$  adalah  $\tilde{x}_{r_0}$  yang merupakan nilai sistem setimbang pada saat  $k = 0$  tereduksi berukuran  $n \times 1$  dan kovariansi awal  $P_0 = P_{x0} = 0,01$ .  $u_k$  adalah variabel input berdasarkan nilai awal yang diberikan dari kondisi batas yang telah ditentukan yaitu dengan suhu  $100^\circ\text{C}$  pada ujung sebelah kiri.

$G$  adalah matriks gangguan inputan berukuran  $n \times n$  yang menyatakan besarnya gangguan panas yang diberikan. Simulasi dilakukan dengan memberikan gangguan berupa matriks identitas berukuran  $n \times n$ .

Jumlah iterasi dilakukan sebanyak  $T = 100$ , dengan demikian diperoleh  $\hat{x}_r$  yaitu hasil estimasi dari sistem tereduksi yang ditampilkan oleh Tabel 4.4 berikut.

**Tabel 4.4.** Hasil Estimasi Sistem Tereduksi Orde 10

$\hat{x}_r$										
0	1	2	3	4	5	...	97	98	99	100
0	-12,29	-24,9	-37,79	-50,97	-63,81	...	-612,7	-615,7	-618,8	-621,7
0	-8,767	-18,18	-28,06	-38,15	-47,45	...	80,38	82,91	85,43	87,9
0	15,77	27,49	33,69	31,94	30,41	...	-4,625	-4,195	-3,781	-3,374
0	3,903	3,425	0,469	-3,219	-6,957	...	23,06	22,1	21,31	20,37
0	3,681	-6,224	2,167	-2,063	0,776	...	-0,172	-0,194	-0,172	-0,179
0	8,435	3,062	-5,122	-2,727	-3,909	...	-5,617	-5,439	-5,328	-5,152
0	0,022	1,164	0,93	-2,698	-4,329	...	-6,675	-6,542	-6,463	-6,346
0	-0,047	-0,291	-0,079	0,834	0,874	...	-5,979	-5,932	-5,868	-5,803
0	0,038	0,272	-0,164	-1,059	-0,403	...	-1,756	-1,772	-1,761	-1,763
0	-0,003	-0,018	0,147	-0,046	-0,37	...	-0,315	-0,31	-0,321	-0,309

Berdasarkan Tabel 4.3 dan Tabel 4.4 diatas, dapat dilihat bahwa orde yang dihasilkan oleh keduanya berbeda. Karena itu perlu dilakukan identifikasi pada hasil estimasi sistem tereduksi untuk memperoleh hubungan antar variabel keadaan yang bersesuaian dengan sistem awal sehingga hasil estimasi antara sistem awal dan sistem tereduksi dapat dibandingkan.

## 4.4 Identifikasi Sistem

### i. Mendapatkan Penyelesaian Sistem Awal

Model sistem dinamik konduksi panas setelah penambahan *noise*:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Gw_k$$

dengan matriks  $A$  dan inisialisasi awal  $\bar{x}_0$  ketika batang dalam keadaan terisolasi sempurna[20].

$$\bar{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

Diperoleh penyelesaian dinamika sistem awal untuk  $k = 0, 1, 2, \dots, 100$  yang ditampilkan oleh Tabel 4.5 berikut.

**Tabel 4.5.** Penyelesaian Dinamika Sistem Awal Terhadap Waktu

$x_k$										
0	1	2	3	4	5	...	97	98	99	100
0	40,92	48,5	56,72	60,85	64,15	...	91,28	91,2	91,37	91,16
0	0,035	16,81	22,92	30,18	34,76	...	82,19	82,71	82,44	82,84
0	0,178	0,113	7,004	10,6	15,39	...	73,9	73,81	74,14	74,04
0	0,022	0,188	-0,01	2,793	4,819	...	65,6	65,88	65,87	65,96
0	-0,015	-0,052	0,044	-0,047	1,286	...	57,99	58,03	58,41	58,54
0	-0,079	-0,012	0,072	0,078	0,045	...	50,59	50,99	51,19	51,18
0	0,063	0,085	0,105	0,125	0,052	...	43,51	43,84	44,18	44,35
0	-0,054	-0,04	0,066	-0,013	0,222	...	37,19	37,4	37,74	38,07
0	-0,023	0,171	-0,195	0,06	-0,064	...	31,36	31,57	31,84	32,26
0	0,019	-0,035	0,053	-0,186	0,067	...	26,49	26,61	26,72	26,95
0	-0,045	0,042	-0,112	0,045	-0,121	...	21,79	21,92	22,1	22,25
0	0,075	-0,049	0,026	-0,023	0,161	...	17,59	17,81	17,94	18,39
0	0,071	0,067	0,165	0,234	0,214	...	14,29	14,32	14,67	14,85
0	0,239	0,043	0,148	0,373	0,184	...	11,39	11,63	11,75	11,88
0	0,04	0,264	0,23	0,257	0,417	...	8,807	9,273	9,088	9,201
0	0,19	0,122	0,231	0,515	0,245	...	6,671	6,629	7,051	6,877
0	0,251	0,114	0,243	0,081	0,461	...	4,53	4,75	4,758	5,135
0	0,126	0,201	-0,02	0,244	0,047	...	3,068	2,952	3,047	3,212
0	0,085	0,026	0,111	-0,002	0,201	...	1,438	1,463	1,588	1,547

## ii. Mendapatkan Sistem Setimbang

$$\tilde{x}_k = T^{-1}x_k$$

Dengan matriks  $T^{-1}$  yang didapat dengan menggunakan *software* MATLAB. Diperoleh nilai sistem setimbang untuk  $k = 0,1,2, \dots, 100$  yang ditampilkan oleh Tabel 4.6 berikut.

**Tabel 4.6.** Nilai Sistem Setimbang Terhadap Waktu

$\tilde{x}_k$										
0	1	2	3	4	5	...	97	98	99	100
0	-12,98	-25,98	-38,81	-52,28	-65,46	...	-615,4	-618,5	-621,6	-624,4
0	-7,913	-17,43	-27,3	-36,35	-45,46	...	81,42	83,6	86,04	89,12
0	16,22	27,57	34,52	33,14	31,5	...	-4,483	-3,984	-3,284	-2,785
0	1,146	1,798	-2,567	-7,768	-11,08	...	23,93	22,47	22,09	21,77
0	3,974	-6,593	2,533	-2,157	1	...	0,314	-0,985	0,325	-0,075
0	9,093	3,883	-4,581	-1,489	-3,207	...	-6,173	-5,272	-5,983	-6,062
0	1,09	0,109	3,753	-1,338	-2,003	...	-5,601	-5,003	-4,514	-6,293
0	3,477	2,689	1,876	1,833	6,025	...	-5,73	-7,497	-4,685	-3,49
0	0,687	5,821	-4,248	-0,059	-0,889	...	-5,749	-8,008	-4,624	0,048
0	-0,572	-4,287	5,429	-6,886	6,58	...	2,595	-0,291	-0,493	-0,622
0	-1,412	4,062	-2,046	-3,281	-0,356	...	-5,592	-9,453	-5,979	-3,272
0	-1,686	-3,941	7,202	-10,68	8,596	...	2,036	-4,782	-2,412	-4,508
0	13,88	-5,251	-8,8	19,23	-21,65	...	8,646	8,884	-4,008	10,05
0	32,51	-29,14	-2,791	-7,188	-10,44	...	13,73	10,84	29,99	0,249
0	-38,86	34,22	16,52	-34,9	37,37	...	-1,223	24,35	-12,39	-8,31
0	-59,76	48,41	16,94	-19,58	38,04	...	-6,126	-3,531	-28,1	-13,96
0	19,21	92,51	-179,8	137,8	-239	...	63,6	-62,94	-176	71,55
0	99,91	-182,7	303,2	-412,3	504,4	...	-285,9	127,2	8,726	138,3
0	100,8	-245,7	338,5	-281	451,1	...	-209	27,85	216	19,41

## iii. Mendapatkan Identifikasi Hasil Estimasi Sistem Tereduksi

Akan didapatkan identifikasi hasil estimasi sistem tereduksi orde 10. Dengan mencari penyelesaian dari persamaan dinamika sistem konduksi panas tereduksi setelah penambahan *noise*:

$$\tilde{x}_{r,k+1} = \tilde{A}_r \tilde{x}_{r,k} + \tilde{B}_r u_k + G_r w_k$$

dengan kondisi awal  $\tilde{x}_{r,0}$  yang merupakan nilai sistem setimbang pada saat  $k = 0$  tereduksi berukuran  $n \times 1$ .

$$\tilde{x}_r^{10}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diperoleh penyelesaian dinamika sistem tereduksi  $\tilde{x}_{r_k}$  yang digunakan untuk mendapatkan hasil estimasi sistem tereduksi sesuai algoritma filter Kalman. Hasil estimasi dari sistem tereduksi telah ditampilkan sebelumnya pada Tabel 4.4.

Setelah itu dilakukan reduksi matriks  $T$  hanya pada bagian kolom hingga berukuran  $s \times n$  dan menjadi matriks:

$$T_r = \begin{bmatrix} -0,207 & -0,394 & 1,2728 & 0,3344 & 0,6476 & 1,3102 & -0,155 & -0,113 & 0,0795 & 0,078 \\ -0,173 & -0,263 & 0,228 & -0,256 & -0,64 & -0,555 & -0,124 & -0,031 & 0,0552 & -0,112 \\ -0,141 & -0,143 & -0,113 & -0,161 & 0,2494 & -0,175 & -0,205 & 0,1064 & -0,281 & 0,0888 \\ -0,114 & -0,056 & -0,158 & -0,007 & -0,039 & 0,0908 & -0,008 & 0,0007 & -4E-04 & -8E-05 \\ -0,092 & 3E-05 & -0,105 & 0,0734 & 0,0133 & 0,0196 & 0,2037 & -0,103 & 0,2795 & -0,089 \\ -0,075 & 0,0324 & -0,064 & 0,0928 & -0,002 & 0,0014 & 0,1391 & 0,0269 & -0,053 & 0,1115 \\ -0,062 & 0,0493 & -0,033 & 0,0786 & -2E-04 & -0,014 & 0,0517 & 0,0643 & -0,06 & -0,069 \\ -0,051 & 0,0564 & -0,013 & 0,0513 & -9E-04 & -0,015 & -0,012 & 0,0424 & -0,024 & 0,0059 \\ -0,042 & 0,0574 & -3E-04 & 0,0228 & -5E-04 & -0,011 & -0,04 & -2E-04 & 0,0109 & -0,002 \\ -0,035 & 0,055 & 0,0068 & -0,001 & -3E-04 & -0,006 & -0,043 & -0,03 & 0,0135 & 0,0094 \\ -0,029 & 0,0505 & 0,0106 & -0,019 & -1E-04 & -8E-04 & -0,033 & -0,04 & 0,0058 & 0,0057 \\ -0,024 & 0,0451 & 0,0122 & -0,03 & 3E-05 & 0,0032 & -0,019 & -0,033 & -0,002 & 0,0021 \\ -0,019 & 0,0392 & 0,0123 & -0,036 & 0,0001 & 0,0059 & -0,006 & -0,016 & -0,006 & -0,001 \\ -0,016 & 0,0331 & 0,0115 & -0,037 & 0,0002 & 0,0072 & 0,0035 & 0,0017 & -0,004 & -0,002 \\ -0,012 & 0,0272 & 0,0101 & -0,035 & 0,0002 & 0,0075 & 0,0096 & 0,0159 & -1E-03 & -0,002 \\ -0,01 & 0,0215 & 0,0084 & -0,031 & 0,0002 & 0,0069 & 0,0121 & 0,0239 & 0,0025 & -7E-04 \\ -0,007 & 0,0159 & 0,0064 & -0,024 & 0,0002 & 0,0057 & 0,0116 & 0,0251 & 0,0045 & 0,0003 \\ -0,005 & 0,0105 & 0,0043 & -0,017 & 0,0001 & 0,004 & 0,0089 & 0,0204 & 0,0045 & 0,0007 \\ -0,002 & 0,0052 & 0,0022 & -0,009 & 6E-05 & 0,0021 & 0,0048 & 0,0113 & 0,0028 & 0,0005 \end{bmatrix}$$

dimana,

$$\hat{\tilde{x}}_{ri} = T_r \cdot \hat{\tilde{x}}_r$$

Sedemikian hingga diperoleh hasil identifikasi dari estimasi sistem tereduksi orde 10 untuk  $k = 0,1,2, \dots, 100$  dan ditampilkan oleh Tabel 4.7 berikut.

**Tabel 4.7.** Hasil Identifikasi dari Estimasi Sistem Tereduksi Orde 10

$\hat{x}_{ri}$										
0	1	2	3	4	5	...	97	98	99	100
0	40,82	48,31	56,48	60,49	64,19	...	91,11	91,16	91,2	91,24
0	-0,003	16,65	22,81	30,06	34,45	...	82,32	82,41	82,49	82,57
0	0,003	0,024	6,766	10,47	15,43	...	73,89	74	74,12	74,24
0	0,001	0,009	0,011	2,795	4,846	...	65,45	65,61	65,76	65,92
0	-0,002	-0,017	0,049	0,102	1,064	...	57,42	57,6	57,79	57,97
0	0,003	0,012	-0,024	-0,03	0,081	...	50,13	50,34	50,56	50,77
0	1E-04	6E-04	0,001	-0,008	-6E-04	...	43,26	43,48	43,73	43,95
0	-8E-04	-0,004	0,004	0,012	-0,012	...	36,94	37,18	37,43	37,66
0	-9E-04	-0,002	-0,004	-4E-04	0,007	...	31,27	31,51	31,76	32
0	-0,001	-0,001	-0,004	-0,005	0,006	...	26,19	26,43	26,67	26,91
0	-0,001	-0,001	-0,004	-0,006	0,004	...	21,68	21,91	22,14	22,37
0	-0,002	-0,001	-0,002	-0,003	0,001	...	17,71	17,93	18,14	18,35
0	-0,002	-0,001	-0,001	-0,002	-2E-04	...	14,26	14,46	14,65	14,84
0	-0,001	-1E-03	-6E-04	-6E-04	-9E-04	...	11,29	11,46	11,63	11,8
0	-0,001	-7E-04	-5E-04	-7E-04	-9E-04	...	8,74	8,887	9,028	9,173
0	-0,001	-5E-04	-6E-04	-0,001	-7E-04	...	6,554	6,674	6,788	6,906
0	-8E-04	-3E-04	-6E-04	-0,001	-4E-04	...	4,661	4,752	4,838	4,927
0	-5E-04	-1E-04	-5E-04	-0,001	-2E-04	...	2,986	3,047	3,105	3,165
0	-3E-04	-3,E-05	-3E-04	-8E-04	-1,E-04	...	1,457	1,488	1,516	1,547

#### 4.5 Analisa Perbandingan

Proses simulasi dilakukan dengan menerapkan algoritma filter Kalman pada model konduksi panas berdimensi satu yang telah didiskritkan terlebih dahulu. Setelah itu proses reduksi pada model diskrit konduksi panas dijalankan, dan kemudian diterapkan kembali algoritma filter Kalman pada sistem yang telah direduksi tersebut. Langkah terakhir adalah mengidentifikasi hasil estimasi dari sistem tereduksi yang diperoleh. Jumlah iterasi dilakukan dengan waktu hitungan total  $T = 100$ . Hasil estimasi dari sistem awal akan dibandingkan dengan hasil estimasi dari sistem tereduksi untuk kemudian dianalisis. Hasil simulasi dari kedua perolehan tersebut akan dievaluasi dengan cara membandingkan nilai *mean absolute error* (MAE) iterasi total dimana formula  $MAE = \frac{\sum |error|}{n}$ , nilai *mean squared error* (MSE) pada iterasi ke  $T$  dimana formula  $MSE = \frac{\sum error^2}{n}$ , dan waktu komputasi yang dibutuhkan. Nilai error diekspresikan menggunakan formula:

$$\text{error 1} = |\text{numerik sistem awal}(x) - \text{nilai estimasi sistem awal}(\hat{x})|$$

**Tabel 4.8.** Nilai MAE Estimasi Sistem Awal

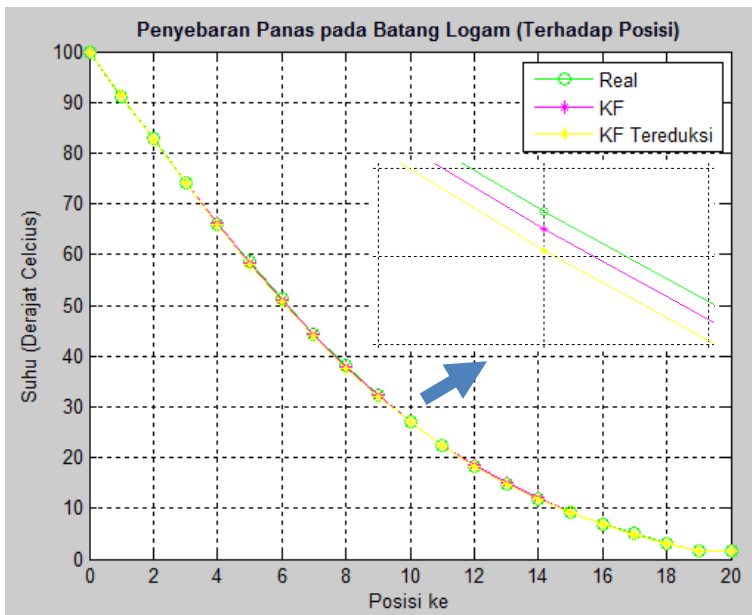
error 1												
0	1	2	3	4	5	...	97	98	99	100	Posisi	error
0	0,1040	0,1819	0,2181	0,3544	0,0328	...	0,1083	0,0127	0,1265	0,1242	<b>X1</b>	0,0978
0	0,0429	0,1342	0,1110	0,1417	0,2274	...	0,2591	0,1869	0,1491	0,1715	<b>X2</b>	0,0995
0	0,1850	0,1272	0,1329	0,0220	0,0518	...	0,0150	0,2549	0,0031	0,1816	<b>X3</b>	0,0919
0	0,0870	0,0807	0,1585	0,0040	0,0119	...	0,1583	0,0485	0,0315	0,1248	<b>X4</b>	0,0650
0	0,0082	0,0410	0,0237	0,1247	0,1385	...	0,1663	0,0055	0,2411	0,2161	<b>X5</b>	0,0999
0	0,0715	0,0349	0,0350	0,0595	0,0079	...	0,1530	0,3730	0,3800	0,1621	<b>X6</b>	0,1171
0	0,0664	0,0481	0,1078	0,0770	0,0671	...	0,0186	0,0874	0,2296	0,1543	<b>X7</b>	0,1248
0	0,0508	0,0550	0,0124	0,0147	0,1914	...	0,0412	0,0508	0,1052	0,1874	<b>X8</b>	0,1073
0	0,0075	0,0245	0,0906	0,0154	0,0062	...	0,1478	0,0981	0,0377	0,0173	<b>X9</b>	0,0629
0	0,0228	0,0475	0,0270	0,1718	0,0159	...	0,1201	0,0092	0,0651	0,0852	<b>X10</b>	0,0915
0	0,0410	0,0019	0,1028	0,0384	0,1519	...	0,0154	0,1140	0,1567	0,2526	<b>X11</b>	0,1055
0	0,0573	0,0599	0,0400	0,1124	0,0500	...	0,2327	0,2483	0,3154	0,1189	<b>X12</b>	0,1085
0	0,0548	0,0035	0,1238	0,0809	0,0144	...	0,0579	0,2624	0,1330	0,1386	<b>X13</b>	0,1042
0	0,0946	0,0152	0,0316	0,0405	0,0173	...	0,0153	0,0290	0,0039	0,1524	<b>X14</b>	0,0618
0	0,0238	0,1942	0,1838	0,1069	0,2050	...	0,0277	0,3067	0,0524	0,0775	<b>X15</b>	0,1069
0	0,1723	0,1104	0,1621	0,4198	0,1260	...	0,1173	0,0798	0,2280	0,0996	<b>X16</b>	0,1212
0	0,2514	0,0798	0,2231	0,0200	0,3680	...	0,0919	0,0083	0,0628	0,1977	<b>X17</b>	0,1115
0	0,1265	0,1832	0,0905	0,2169	0,0083	...	0,1262	0,0417	0,0290	0,0774	<b>X18</b>	0,1090
0	0,0864	0,1018	0,0977	0,0296	0,0900	...	0,0776	0,0020	0,1322	0,0133	<b>X19</b>	0,0638
<b>MAE 1</b>											<b>0,0974</b>	

$$\text{error 2} = |\text{numerik sistem awal}(x) - \text{nilai estimasi sistem tereduksi}(\hat{x}_{r_i})|$$

**Tabel 4.9.** Nilai MAE Estimasi Sistem Tereduksi Orde 10

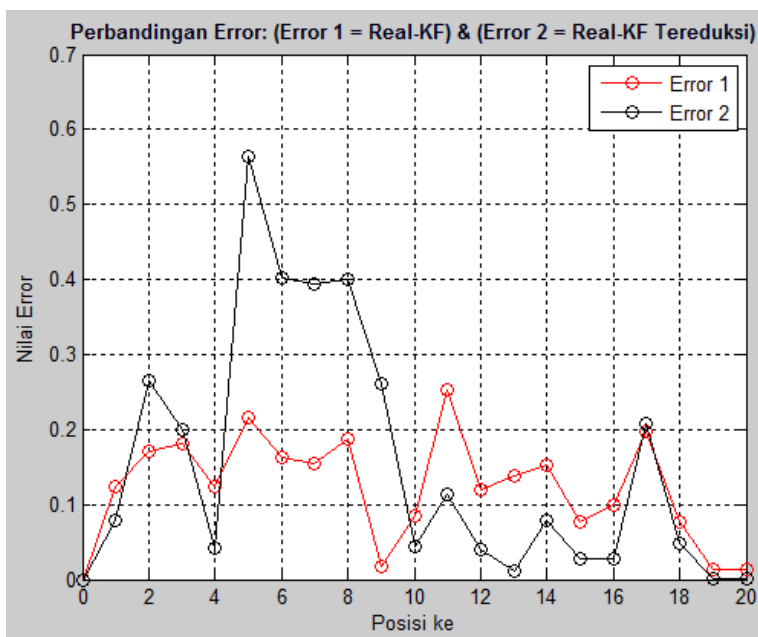
error 2												
0	1	2	3	4	5	...	97	98	99	100	Posisi	error
0	0,1049	0,1866	0,2402	0,3603	0,0368	...	0,1672	0,0430	0,1771	0,0796	<b>X1</b>	0,0936
0	0,0375	0,1631	0,1100	0,1258	0,3133	...	0,1285	0,2958	0,0444	0,2655	<b>X2</b>	0,1035
0	0,1749	0,0888	0,2374	0,1291	0,0384	...	0,0149	0,1889	0,0173	0,1987	<b>X3</b>	0,1090
0	0,0207	0,1788	0,0208	0,0019	0,0267	...	0,1450	0,2772	0,1106	0,0427	<b>X4</b>	0,1328
0	0,0137	0,0350	0,0050	0,1495	0,2226	...	0,5749	0,4314	0,6147	0,5637	<b>X5</b>	0,2073
0	0,0819	0,0234	0,0959	0,1075	0,0351	...	0,4559	0,6471	0,6216	0,4013	<b>X6</b>	0,1736
0	0,0626	0,0845	0,1033	0,1331	0,0524	...	0,2528	0,3534	0,4530	0,3947	<b>X7</b>	0,1919
0	0,0533	0,0361	0,0629	0,0248	0,2337	...	0,2490	0,2184	0,3137	0,4011	<b>X8</b>	0,2040
0	0,0221	0,1727	0,1916	0,0600	0,0710	...	0,0962	0,0564	0,0814	0,2619	<b>X9</b>	0,1945
0	0,0206	0,0336	0,0575	0,1811	0,0602	...	0,3024	0,1743	0,0497	0,0438	<b>X10</b>	0,1700
0	0,0433	0,0431	0,1082	0,0505	0,1255	...	0,1048	0,0082	0,0451	0,1145	<b>X11</b>	0,1690
0	0,0764	0,0478	0,0280	0,0196	0,1597	...	0,1214	0,1234	0,2009	0,0402	<b>X12</b>	0,1817
0	0,0721	0,0684	0,1664	0,2358	0,2141	...	0,0322	0,1369	0,0202	0,0107	<b>X13</b>	0,1819
0	0,2399	0,0435	0,1482	0,3734	0,1850	...	0,1002	0,1690	0,1262	0,0779	<b>X14</b>	0,1797
0	0,0408	0,2650	0,2304	0,2579	0,4181	...	0,0672	0,3861	0,0599	0,0278	<b>X15</b>	0,1781
0	0,1908	0,1224	0,2315	0,5166	0,2455	...	0,1171	0,0455	0,2627	0,0284	<b>X16</b>	0,1834
0	0,2520	0,1147	0,2439	0,0829	0,4614	...	0,1307	0,0016	0,0802	0,2082	<b>X17</b>	0,1648
0	0,1268	0,2015	0,0191	0,2455	0,0472	...	0,0817	0,0950	0,0579	0,0477	<b>X18</b>	0,1471
0	0,0856	0,0264	0,1113	0,0014	0,2007	...	0,0189	0,0244	0,0719	0,0009	<b>X19</b>	0,1079
<b>MAE 2</b>											<b>0,1618</b>	

Dari perolehan nilai MAE iterasi total estimasi sistem awal dan sistem tereduksi yang ditampilkan oleh Tabel 4.8 dan Tabel 4.9, nilai MAE estimasi sistem tereduksi lebih besar dari nilai MAE estimasi sistem awal. Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil estimasi terbaik dalam konteks nilai MAE adalah estimasi yang dilakukan pada sistem awal karena memiliki nilai MAE paling kecil. Grafik hasil estimasi sistem awal dan sistem tereduksi orde 10 serta perbandingan error antara keduanya ditunjukkan pada Gambar 4.6 dan Gambar 4.7 di bawah ini.



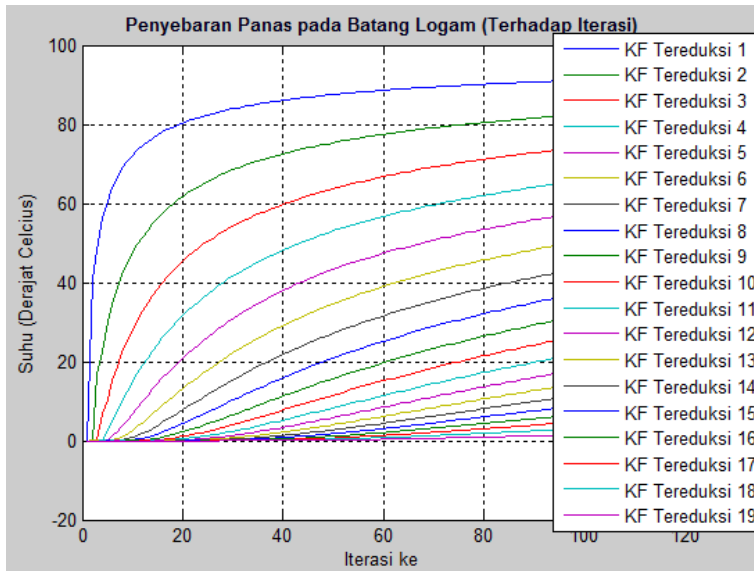
**Gambar 4.6.** Penyebaran Panas pada Batang Logam Terhadap Posisi





**Gambar 4.7.** Perbandingan Error Hasil Estimasi Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 10

Dan berikut adalah grafik penyebaran panas hasil estimasi sistem tereduksi yang ditunjukkan pada Gambar 4.8 di bawah ini.



**Gambar 4.8.** Penyebaran Panas pada Batang Logam Terhadap Iterasi

Pada Gambar 4.8 dapat dilihat perjalanan perambatan panas tiap posisi batang yang bergerak semakin keatas menuju ke titik terpanas yaitu  $100^{\circ}\text{C}$  seiring berjalannya waktu oleh proses pemanasan. Grafik penyebaran panas hasil estimasi sistem tereduksi tersebut tidak menunjukkan perbedaan yang terlalu signifikan dengan nilai *real* sistem awal.

Dan berikut adalah perbandingan nilai *mean squared error* (MSE) pada iterasi ke  $T = 100$  antara estimasi sistem awal dan sistem tereduksi orde 10 yang ditampilkan oleh Tabel 4.10.

**Tabel 4.10.** Perbandingan Nilai MSE pada Iterasi ke  $T = 100$  antara Estimasi Sistem Awal dan Sistem Tereduksi Orde 10

$x$	$\hat{x}$	error 1	$(err\ 1)^2$	$\hat{x}_{ri}$	error 2	$(err\ 2)^2$
100	100	0	0	100	0	0
91,1608	91,2850	0,1242	0,0154	91,2404	0,0796	0,0063
82,8393	82,6677	0,1715	0,0294	82,5737	0,2655	0,0705
74,0412	74,2228	0,1816	0,0330	74,2400	0,1987	0,0395
65,9592	66,0840	0,1248	0,0156	65,9165	0,0427	0,0018
58,5368	58,3207	0,2161	0,0467	57,9732	0,5637	0,3177
51,1761	51,0140	0,1621	0,0263	50,7748	0,4013	0,1610
44,3467	44,1924	0,1543	0,0238	43,9520	0,3947	0,1558
38,0660	37,8786	0,1874	0,0351	37,6649	0,4011	0,1609
32,2593	32,2420	0,0173	0,0003	31,9974	0,2619	0,0686
26,9529	27,0382	0,0852	0,0073	26,9091	0,0438	0,0019
22,2531	22,5057	0,2526	0,0638	22,3676	0,1145	0,0131
18,3926	18,5115	0,1189	0,0141	18,3524	0,0402	0,0016
14,8514	14,9900	0,1386	0,0192	14,8407	0,0107	0,0001
11,8754	12,0278	0,1524	0,0232	11,7975	0,0779	0,0061
9,2008	9,2783	0,0775	0,0060	9,1730	0,0278	0,0008
6,8773	6,9770	0,0996	0,0099	6,9057	0,0284	0,0008
5,1352	4,9375	0,1977	0,0391	4,9270	0,2082	0,0434
3,2125	3,1351	0,0774	0,0060	3,1648	0,0477	0,0023
1,5474	1,5341	0,0133	0,0002	1,5465	0,0009	0,0000
<b>NILAI</b>	<b>MSE 1</b>		<b>0,0207</b>	<b>MSE 2</b>		<b>0,0526</b>

Dari perolehan nilai MSE estimasi sistem awal dan sistem tereduksi yang ditampilkan oleh Tabel 4.10, nilai MSE hasil estimasi sistem tereduksi lebih besar dari nilai MSE hasil estimasi sistem awal. Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil estimasi terbaik dalam konteks nilai MSE adalah estimasi yang dilakukan pada sistem awal karena memiliki nilai MSE paling kecil.

Evaluasi terakhir sebagai perbandingan keefektifan reduksi model pada proses estimasi suatu sistem adalah waktu komputasi yang dibutuhkan. Berjalannya kasus pertama yaitu proses estimasi sistem awal memakan waktu 2,7679 detik. Sedangkan berjalannya kasus kedua yaitu reduksi sistem awal, proses estimasi sistem tereduksi, sampai dengan identifikasi hasil

estimasi sistem tereduksi memakan waktu 1,9453 detik. Dari hasil perolehan waktu komputasi kedua kasus, waktu komputasi pada kasus kedua lebih cepat daripada kasus pertama.

MSE dapat dianalogikan sebagai varian dari suatu model, sehingga MSE lebih merepresentasikan model sistem diskrit sebagai jarak terdekat. MSE sangat baik dalam memberikan gambaran terhadap seberapa konsisten model yang dibangun. Dengan meminimalkan nilai MSE, berarti meminimalkan varian model. Model yang memiliki varian kecil mampu memberikan hasil yang relatif lebih konsisten untuk seluruh data input dibandingkan dengan model dengan varian (MSE) besar. Sedemikian hingga dalam Tugas Akhir ini, nilai MSE lah yang akan dijadikan tolak ukur perbandingan keseluruhan proses estimasi sistem awal dan sistem tereduksi dari semua orde sistem yang memenuhi syarat tereduksi. Berikut adalah perbandingan nilai MSE dan waktu komputasi antara kasus 1 dengan kasus 2 dari semua orde yang memenuhi syarat orde tereduksi, yang diperoleh setelah *merunning* program sebanyak tiga kali untuk diambil rata-rata nya. Ditampilkan oleh Tabel 4.11 di bawah ini.

**Tabel 4.11.** Perbandingan Nilai MSE dan Waktu Komputasi Orde Sistem yang Memenuhi Syarat Tereduksi

ORDE	Kasus 1		Kasus 2	
	MSE	WAKTU	MSE	WAKTU
11	0,0141	2,2560	0,0766	1,6644
10	0,0231	2,4551	0,0400	1,7723
8	0,0157	2,7221	0,0691	1,9405
7	0,0145	2,2267	0,0509	1,6066
6	0.0062	2,4485	0,8009	1,7748
5	0,0461	2,4654	1,5235	1,8569
4	0.0138	2,2359	1,8060	1,6757
3	0,0209	2,5084	0,7389	1,8149
2	0,0118	1,9784	8,1318	1,4409
1	0,0123	2,2233	144,0877	1,5971

Hasil dari Tabel 4.11 memperkuat analisa perbandingan yang didapat sebelumnya dari proses yang dilakukan pada orde 10. Nilai MSE hasil estimasi sistem tereduksi lebih besar daripada nilai MSE hasil estimasi sistem awal. Sehingga dapat ditarik kesimpulan akhir bahwa hasil estimasi terbaik dalam konteks nilai MSE adalah estimasi yang dilakukan pada sistem awal karena memiliki nilai MSE paling kecil, dengan perubahan persentase relatif minimal sebesar 73,2%. Sedangkan dalam hal perolehan waktu komputasi kedua kasus, waktu komputasi pada kasus kedua lebih cepat daripada kasus pertama. Hal ini berlaku untuk semua orde yang memenuhi syarat tereduksi.

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## **BAB V**

### **PENUTUP**

Pada bab ini diperoleh kesimpulan dari hasil analisis dan pembahasan yang diperoleh dari identifikasi dan estimasi variabel keadaan dari sistem tereduksi dengan metode pemotongan setimbang pada model konduksi panas, serta diberikan saran yang dapat dilakukan sebagai kelanjutan dari Tugas Akhir ini.

#### **5.1 Kesimpulan**

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan hasil analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Reduksi model dapat diterapkan pada model konduksi panas yang memenuhi sifat sistem awal stabil, terkendali, dan teramati.
2. Algoritma filter Kalman dapat diimplementasikan pada sistem tereduksi untuk model konduksi panas, namun diperlukan proses identifikasi pada hasil estimasi sistem tereduksi agar diperoleh variabel keadaan yang bersesuaian dengan sistem awalnya.
3. Identifikasi variabel keadaan dapat diterapkan pada hasil estimasi sistem tereduksi untuk model konduksi panas dengan rumus  $\hat{x}_{ri} = T_r \cdot \hat{x}_r$ , dimana  $\hat{x}_r$  merupakan hasil estimasi sistem tereduksi dan  $T_r$  merupakan matriks Transformasi  $T$  yang tereduksi hanya pada bagian kolom.
4. Berdasarkan nilai error, hasil estimasi terbaik adalah estimasi yang dilakukan pada sistem awal karena memiliki nilai error yang paling kecil, dengan perubahan presentase relatif minimal sebesar 73,2%. Sedangkan jika ditinjau berdasarkan waktu komputasi, waktu komputasi pada berjalannya reduksi sistem awal, proses estimasi sistem tereduksi, sampai dengan identifikasi hasil estimasi sistem tereduksi lebih cepat dibandingkan dengan proses estimasi sistem awal.

## **5.2 Saran**

Pada Tugas Akhir ini, permasalahan yang dikaji masih jauh dari kesempurnaan sehingga sangat memungkinkan untuk lebih dikembangkan bidang kajian yang lebih luas dan lebih lanjut lagi. Selain itu, penggunaan metode lain juga disarankan agar dapat mengetahui keefektifan reduksi model yang lebih baik untuk selanjutnya dilakukan proses estimasi dan identifikasi.

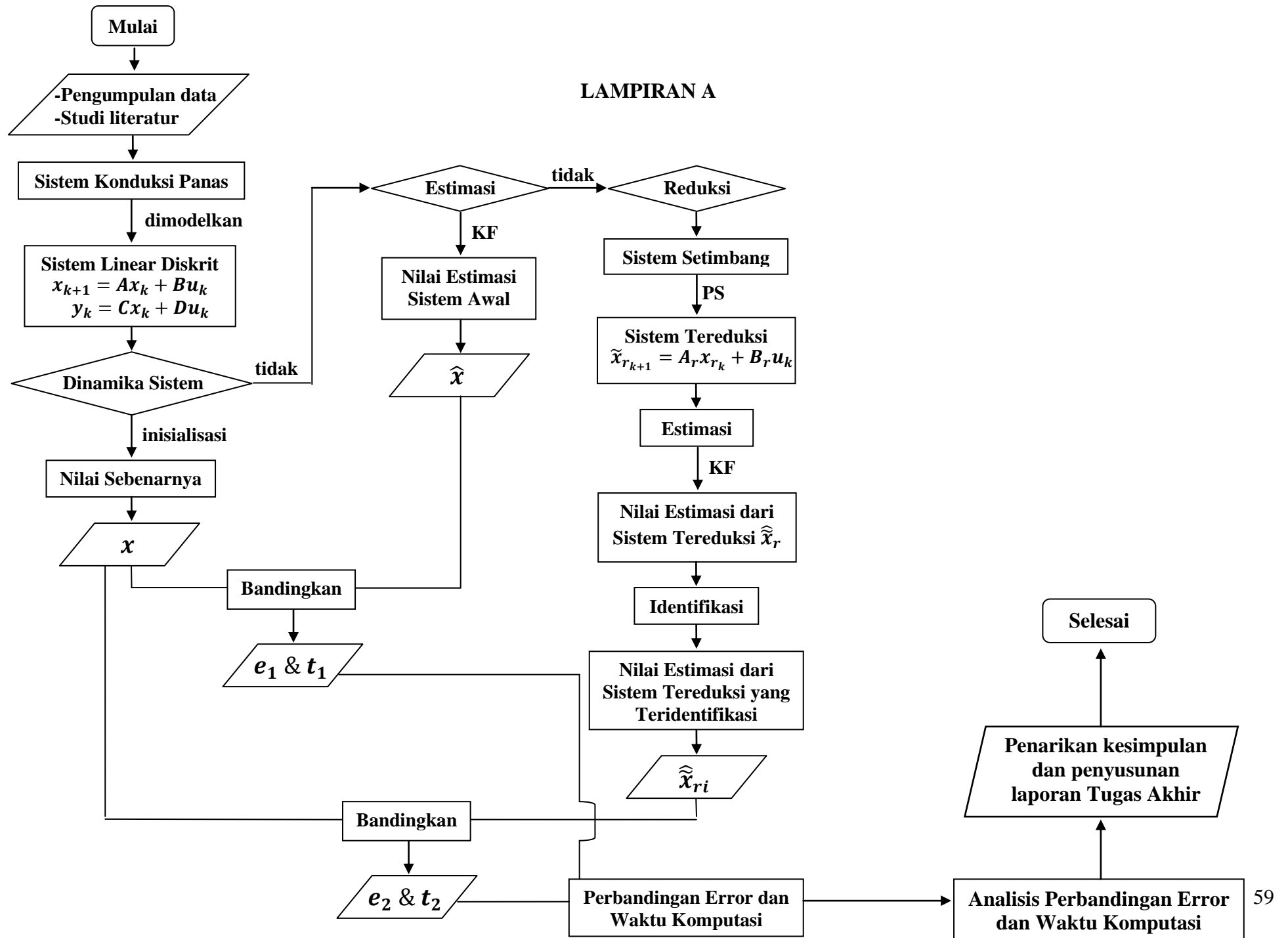


## DAFTAR PUSTAKA

- [1] Subiono. 2013. **“Sistem Linear dan Kontrol Optimal”**. Surabaya: Jurusan Matematika Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [2] Arif, D.K. 2014. **“Konstruksi dan Implementasi Algoritma Filter Kalman pada Model Tereduksi”**. Disertasi S3. Jurusan Matematika FMIPA – UGM. Yogyakarta.
- [3] Sari, Y. I. 2016. **“Analisis Reduksi Model Pada Sistem Linear Waktu Diskrit”**. Jurusan Matematika – Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- [4] Kartika, D. A. 2016. **“Analisis Reduksi Model Pada Sistem Linear Waktu Kontinu”**. Jurusan Matematika – Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- [5] Khasanah, I. N. 2016. **“Analisis Reduksi Model Pada Sistem Linier Waktu Diskrit Tak Stabil”**. Jurusan Matematika – Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
- [6] Mustaqim, K., et al. 2017. **“Model Reduction of Unstable Systems Using Balanced Truncation Method and Its Application to Shallow Water Equations”**. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 855 (2017) 012029.
- [7] Kwakernaak, H. and Sivan, R. 1972. **“Linear Optimal Control Systems”**, Wiley-Interscience.
- [8] Fitria, R. and Arif, D. K. 2017. **“State Variable Estimation of Nonisothermal Continuous Stirred Tank Reactor Using Fuzzy Kalman Filter”**. International Journal of Computing Science and Applied Mathematics (IJCA), Vol. 3, No.1, February 2017.
- [9] Lewis, F. L. 1992. **“Applied Optimal Control and Estimation: Digital Design and Implementation”**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [10] Arif, D.K, et al. 2014. **“Construction of the Kalman Filter Algorithm on the Model Reduction”**. International

- Journal Control and Automation (IJCA), Vol. 7, No.9, pp. 257-270.
- [11] Lesnussa, T.P., et al. 2017. **“Identification and Estimation of State Variables on Reduced Model Using Balanced Trucation Method”**. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series 855 (2017) 012023.
  - [12] Ogata, K. 1995. **“Discrete-time Control Sitems”**. Canada: Prentice-Hall International, Inc.
  - [13] Rochmah, M., Fatmawati. dan Purwati, U.D. 2015. **“Reduksi Orde Model Sistem Linier Waktu Diskrit dengan Metode Singular Perturbation Approximation”**. Jurnal Matematika. Universitas Airlangga.
  - [14] Skogestad,S., Postlethwaite,I. (2001). **“Multivariable Feedback Control Analysis and Design”**. Chichester: John Wiley and Sons.
  - [15] Lewis, F. L. 1986. **“Optimal Estimation With An Introduction Stochastic Control Theory”**. USA.
  - [16] Pertiwi, S.P. 2016. **“Identifikasi Variabel pada Sistem Tereduksi Linier Waktu Kontinu”**. Jurusan Matematika – Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.
  - [17] Widodo, B. 2012. **“Pemodelan Matematika”**. Surabaya: ITS Press.
  - [18] Triatmodjo, B. 2002. **“Metode Numerik”**. Yogyakarta: Beta Offset.
  - [19] Nugrahini, T. 2012. **“Perbandingan Metode Kalman Filter dan Metode Ensemble Kalman Filter Dalam Mendeteksi Gangguan Konduksi Panas Pada Batang Logam”**. Jurusan Matematika. Universitas Jember.
  - [20] Budiono, W.S. 2010. **“Deteksi Gangguan Panas Pada Batang Logam Menggunakan Metode Ensemble Kalman Filter”**. Jurusan Matematika – Institut Teknologi Sepuluh Nopember. Surabaya.

## LAMPIRAN A



Gambar 3.1. Diagram Alir Metodologi Penelitian

*(Halaman ini sengaja dikosongkan)*

## **LAMPIRAN B**

### **Listing Program**

```
% Program Dinamika Sistem, Reduksi Orde, KF, &
Identifikasi Konduksi Panas Dimensi Satu
% Oleh: Fella Diandra Chrisandy
% NRP: 1213100039
clear all;
close all;
disp('
SIMULASI TUGAS AKHIR
');
disp('IDENTIFIKASI & ESTIMASI VARIABEL KEADAAN
DARI SISTEM TEREDUKSI DENGAN METODE PEMOTONGAN
SETIMBANG PADA MODEL KONDUKSI PANAS');
disp('=====
=====
=====');
%% INPUT NLAI AWAL (INISIALISASI)
disp(' -----> INPUT NILAI AWAL
(INISIALISASI)');
disp('Inputkan nilai berikut sedemikian hingga
sistem memenuhi syarat untuk dapat direduksi
(stabil, terkendali, & teramati) : ');
x=input('masukkan panjang plat(l) = '); %7
f=input('banyaknya pendiskritan(f) = '); %20
u0=input('masukkan suhu awal ujung batang
logam(T) = '); %100 (batas kiri)
n=input('masukkan besar orde(n) sistem
tereduksi (syarat: n<f-1) = ');
v=input('masukkan nomor posisi variabel(v) yg
ingin diamati (syarat: v<=n) = ');
%% Start 1
tStart1=tic;
% Waktu mulai 1
format long;
%% PEMBENTUKAN SISTEM AWAL, MATRIKS (A,B,C,D)
disp('I. PEMBENTUKAN SISTEM AWAL');
disp('Diberikan matriks A,B,C,D untuk sistem
(A,B,C,D) model konduksi panas sebagai
```

```

berikut:');
% -----> TAHAP INISIALISASI
j=100; % Input('jumlah iterasi (satuan
waktu)')
Q=0.01; % Input ('nilai kovariansi sistem')
R=0.01; % Input ('nilai kovariansi
pengukuran')
b=4; % Input ('jumlah alat ukur')
% Parameter model
alpha=0.05; % Input ('koefisien konduktivitas
logam aluminium')
dt=1; % Input ('delta t: ')
dx=x/f; % Input ('delta x: ')
px=(alpha/dx^2)*dt;
P0=0.01; % kovariansi error
Pcora=P0;
% Ukuran matrix keadaan
s=f-1;
% Matriks A=matriks hasil pendiskritan
berukuran sxs
A=zeros(s,s);
for i=1:s
A(i,i)=1-2*px;
end
for i=1:s-1
A(i+1,i)=px;
A(i,i+1)=px;
end
disp('matriks A = ');
disp(A);
% Matriks B=matriks koefisien variabel input
berukuran sxs
B=zeros(s,1);
B(1,1)=px;
disp('matriks B = ');
disp(B);
% Matriks C=matriks pengukuran berukuran bxs
C=zeros(b,s);
C(1,s-15)=1;
C(2,s-10)=1;
C(3,s-5)=1;

```

```

C(4,s)=1;
disp('matriks C = ');
disp(C);
dma=size(C,1); % Dimensi matriks C
R1=R*eye(dma); % Matriks kovarian model error
% Matriks D
D=0;
disp('matriks D = ');
disp(D);
% Matriks x0=variabel input yang diberikan
secara deterministik
x0=zeros(s,1);
for i=1:s
x0(i,1)=0;
end
% Matriks Ga=matriks koefisien variabel noise
berukuran sxs
Ga=eye(s);
% Inisialisasi
xre0a=x0;
xr0a=x0;
xcora=x0;
xcor0a=x0;
%% KALMAN FILTER SISTEM AWAL (A,B,C,D)
% Penyelesaian/Dinamika Sistem Awal Konduksi
Panas
for i=1:j
% Model sistem dan model pengukuran
xreala=A*xre0a+B*u0+Ga*sqrt(Q)*randn(s,1);
% xreala=nilai real sistem awal iterasi ke j
z1=C*xreala+sqrt(R)*randn(dma,1);
xre0a=xreala;

xretot1=[xr0a xreala];
% xretot1=nilai real sistem awal iterasi ke
1:j
xr0a=xretot1;
% -----> TAHAP PREDIKSI
% Kovariansi error
Pprea=A*Pcora*A'+Ga*Q*Ga';
% Estimasi

```

```

xprea=A*xcora+B*u0;
% -----> TAHAP KOREKSI
% Kalman gain
Ka=Pprea*C'*inv(C*Pprea*C'+R1);
% Kovariansi error
Pcora=(eye(s)-Ka*C)*Pprea;
% Estimasi
xcora=xprea+Ka*(z1-C*xprea);
% xcora=nilai estimasi sistem awal iterasi ke
j

xcortotl=[xcor0a xcora];
% xcortotl=nilai estimasi sistem awal iterasi
ke 1:j
xcor0a=xcortotl;
end
% Sistem awal
sisAwal=ss(A,B,C,D,1);
% Analisa sifat sistem awal
disp(' -----> sifat sistem awal (kestabilan,
keterkendalian, dan keteramatan)');
% Kestabilan sistem awal
det_A=det(A);
disp('determinan matriks A = ');
disp(det_A);
eig_A=abs(eig(A));
disp('nilai eigen matriks A = ');
disp(eig_A);
unstable=0;
stable=0;
astable=0;
for i=1:s
    if eig_A(i)>1
        unstable=unstable +1;
    end
    if eig_A(i)==1
        stable=stable +1;
    end
    if eig_A(i)<1
        astable=astable +1;
    end
end

```



```

end
disp('nilai eigen tidak stabil = ');
disp(unstable);
disp('nilai eigen stabil = ');
disp(stable);
disp('nilai eigen stabil asimtotik = ');
disp(astable);
if eig_A<=abs(1)
disp('SISTEM STABIL');
else
disp('sistem tidak stabil');
end
% Keterkendalian dan keteramatan sistem awal
Mc=ctrb(A,B);
Mo=obsv(A,C);
disp('rank matriks A = ');
disp(rank(A));
disp('rank matriks keterkendalian (Mc) = ');
disp(rank(Mc));
disp('rank matriks keteramatan (Mo) = ');
disp(rank(Mo));
if rank(A)==rank(Mc)
if rank(A)==rank(Mo)
disp('rank A = rank Mc = rank Mo');
disp('SISTEM TERKENDALI DAN TERAMATI');
else
disp('rank A = rank Mc, rank A /= rank Mo');
disp('sistem terkendali namun tidak
teramati');
end
elseif rank(A)==rank(Mo)
disp('rank A /= rank Mc, rank A = rank Mo');
disp('sistem tidak terkendali namun
teramati');
else
disp('rank A /= rank Mc /= rank Mo');
disp('sistem tidak terkendali dan tidak
teramati');
end
% Pembentukan Gramian keterkendalian dan
gramian keteramatan sistem awal

```

```

disp(' -----> pembentukan gramian sistem
awal');
W=gram(sisAwal,'c');
disp('gramian keterkendalian (W) = ');
disp(W);
M=gram(sisAwal,'o');
disp('gramian keteramatan (M) = ');
disp(M);
if(det(W)>0)
disp('GRAMIAN W DEFINIT POSITIF');
else
error('gramian W tidak definit
positif','tidak terkendali');
break
end
if(det(M)>0)
disp('GRAMIAN M DEFINIT POSITIF');
else
error('gramian M tidak definit
positif','tidak teramati');
break
end
% Pembentukan fungsi transfer pada sistem awal
Gaw=tf(sisAwal);
%% End 1
minTime1=Inf;
tElapsed1=toc(tStart1);
minTime1=min(tElapsed1,minTime1);
% Waktu selesai 1
%% Start 2
tStart2=tic;
% Waktu mulai 2
%% PEMBENTUKAN SISTEM SETIMBANG, MATRIKS
(At,Bt,Ct,Dt)
disp('II. PEMBENTUKAN SISTEM SETIMBANG');
disp('Diperoleh matriks At,Bt,Ct,Dt untuk
sistem setimbang (At,Bt,Ct,Dt) model konduksi
panas sebagai berikut:');
% Matriks psi
disp(' -----> pembentukan matriks Psi
sedemikian hingga W=Psitrans*Psi');

```

```

Psi=chol(W);
cekW=Psi'*Psi;
disp('matriks Psi = ');
disp(Psi);
% Diagonalisasi
disp(' -----> diagonalisasi Psi*M*Psitrans
sedemikian hingga
Psi*M*Psitrans=U*(Sigma^2)*Utrans');
Z=Psi*M*Psi';
[U,L,U]=svd(Z);
cekz=U*L*U';
sigma=(L).^(1/2);
% Matriks transformasi T
disp(' -----> pembentukan matriks
transformasi T');
T=Psi'*U*inv(sqrt(sigma));
disp('matriks T = ');
disp(T);
% Sistem Setimbang
disp(' -----> sistem setimbang');
At=inv(T)*sisAwal.a*T;
disp('matriks A tilda (At) = ');
disp(At);
Bt=inv(T)*sisAwal.b;
disp('matriks B tilda (Bt) = ');
disp(Bt);
Ct=sisAwal.c*T;
disp('matriks C tilda (Ct) = ');
disp(Ct);
Dt=sisAwal.d*0;
disp('matriks D tilda (Dt) = ');
disp(Dt);
sisSetimbang=ss(At,Bt,Ct,Dt,1);
% Penyelesaian Sistem Setimbang Terhadap Waktu
xretott=inv(T)*xretotl;
% Analisa sifat sistem setimbang
% Kestabilan sistem setimbang
disp(' --> menguji kestabilan sistem
setimbang');
det_At=det(At);
disp('determinan matriks At = ');

```

```

disp(det_At);
eig_At=abs(eig(At));
disp('nilai eigen matriks At = ');
disp(eig_At);
unstable=0;
stable=0;
astable=0;
for i=1:s
if eig_At(i)>1
unstable=unstable +1;
end
if eig_At(i)==1
stable=stable +1;
end
if eig_At(i)<1
astable=astable +1;
end
end
disp('nilai eigen tidak stabil = ');
disp(unstable);
disp('nilai eigen stabil = ');
disp(stable);
disp('nilai eigen stabil asimtotik = ');
disp(astable);
if eig_At<=abs(1)
disp('SISTEM STABIL');
else
disp('sistem tidak stabil');
end
% Keterkendalian dan keteramatan sistem
setimbang
disp(' --> menguji keterkendalian dan
keteramatan sistem setimbang');
Mct=ctrb(At,Bt);
Mot=obsv(At,Ct);
disp('rank matriks A tilda (At) = ');
disp(rank(At));
disp('rank matriks keterkendalian Mc tilda
(Mct) = ');
disp(rank(Mct));
disp('rank matriks keteramatan Mo tilda (Mot)

```

```

= ');
disp(rank(Mot));
if rank(At)==rank(Mct)
if rank(At)==rank(Mot)
disp('rank At = rank Mct = rank Mot');
disp('SISTEM TERKENDALI DAN TERAMATI');
else
disp('rank At = rank Mct, rank At /= rank
Mot');
disp('sistem terkendali namun tidak
teramati');
end
elseif rank(At)==rank(Mot)
disp('rank At /= rank Mct, rank At = rank
Mot');
disp('sistem tidak terkendali namun
teramati');
else
disp('rank At /= rank Mct /= rank Mot');
disp('sistem tidak terkendali dan tidak
teramati');
end
% Pembentukan Gramian keterkendalian dan
gramian keteramatan sistem setimbang
disp(' --> pembentukan gramian sistem
setimbang');
Wt=gram(sisSetimbang,'c');
disp('gramian keterkendalian sistem setimbang
(Wt) = ');
disp(Wt);
Mt=gram(sisSetimbang,'o');
disp('gramian keteramatan sistem setimbang
(Mt) = ');
disp(Mt);
if(det(Wt)>0)
disp('GRAMIAN Wt DEFINIT POSITIF');
else
error('gramian Wt tidak definit
positif','tidak terkendali');
break
end

```

```

if(det(Mt)>0)
disp('GRAMIAN Mt DEFINIT POSITIF');
else
errorldg('gramian Mt tidak definit
positif','tidak teramati');
break
end
hsv=hsvd(sisSetimbang);
disp('nilai singular hankel = ');
disp(hsv);
%% PEMBENTUKAN SISTEM TEREDUKSI
(Atr,Btr,Ctr,Dtr)
disp('III. PEMBENTUKAN SISTEM TEREDUKSI');
disp('Pembentukan sistem tereduksi
(Atr,Btr,Ctr,Dtr) adalah sebagai berikut:');
orde=zeros(1,s-n);
for i=1:s-n
orde(1,i)=n+i;
end
rsys=modred(sisSetimbang,orde,'truncate');
Atr=rsys.a;
Btr=rsys.b;
Ctr=rsys.c;
Dtr=rsys.d*0;
% Analisa sifat sistem tereduksi
% Kestabilan sistem tereduksi
disp(' --> menguji kestabilan sistem
tereduksi');
det_Atr=det(Atr);
disp('determinan matriks Atr = ');
disp(det_Atr);
eig_Atr=abs(eig(Atr));
disp('nilai eigen matriks Atr = ');
disp(eig_Atr);
unstable=0;
stable=0;
astable=0;
for i=1:n
if eig_Atr(i)>1
unstable=unstable +1;
end

```

```

if eig_Atr(i)==1
stable=stable +1;
end
if eig_Atr(i)<1
astable=astable +1;
end
end
disp('nilai eigen tidak stabil = ');
disp(unstable);
disp('nilai eigen stabil = ');
disp(stable);
disp('nilai eigen stabil asimtotik = ');
disp(astable);
if eig_Atr<=abs(1)
disp('SISTEM STABIL');
else
disp('sistem tidak stabil');
end
% Keterkendalian dan keteramatan sistem
tereduksi
disp(' --> menguji keterkendalian dan
keteramatan sistem tereduksi');
Mctr=ctrb(Atr,Btr);
Motr=obsv(Atr,Ctr);
disp('rank matriks A tilda reduksi (Atr) = ');
disp(rank(Atr));
disp('rank matriks keterkendalian Mc tilda
reduksi (Mctr) = ');
disp(rank(Mctr));
disp('rank matriks keteramatan Mo tilda
reduksi (Motr) = ');
disp(rank(Motr));
if rank(Atr)==rank(Mctr)
if rank(Atr)==rank(Motr)
disp('rank Atr = rank Mctr = rank Motr');
disp('SISTEM TERKENDALI DAN TERAMATI');
else
disp('rank Atr = rank Mctr, rank Atr /= rank
Motr');
disp('sistem terkendali namun tidak
teramati');

```

```

end
elseif rank(Atr)==rank(Motr)
disp('rank Atr /= rank Mctr, rank Atr = rank
Motr');
disp('sistem tidak terkendali namun
teramati');
else
disp('rank Atr /= rank Mctr /= rank Motr');
disp('sistem tidak terkendali dan tidak
teramati');
end
% Pembentukan fungsi transfer sistem tereduksi
Gr=tf(rsys);
%% Norm
disp(' --> menguji syarat besar orde sistem
tereduksi');
Gaw=tf(sisAwal);
Gr=tf(rsys);
error=Gaw-Gr;
NormPS=norm(error,inf);
disp('Norm Pemotongan Setimbang');
disp(NormPS);
syarat=2*sum(hsv(n+1:s));
disp('syarat =
2*sum(sigma_n+1,sigma_n+2,...,sigma_s)');
disp('syarat = ');
disp(syarat);
if NormPS<=syarat
disp('Norm Pemotongan Setimbang <= syarat');
disp('ORDE TEREDUKSI MEMENUHI');
else
disp('Norm Pemotongan Setimbang <=/ syarat');
disp('orde tereduksi tidak memenuhi');
end
%% KALMAN FILTER SISTEM TEREDUKSI
(Atr,Btr,Ctr,Dtr)
% -----> TAHAP INISIALISASI
Pcor=P0;
dm=size(Ctr,1); % Dimensi matriks Ctr
R2=R*eye(dm); % Matriks kovarian model error
% Matriks G=matriks koefisien variabel noise

```



```

berukuran nxn
G=eye(n);
% Inisialisasi
sys=ss(T,xretott(:,1),Ct,Dt,1);
rsys2=modred(sys,orde,'truncate');
xre0=rsys2.b;
xr0=xre0;
xcor=xre0;
xcor0=xre0;
% Penyelesaian/Dinamika Sistem Tereduksi
Konduksi Panas
for i=1:j
% Model sistem dan model pengukuran
xreal=Atr*xre0+Btr*u0+G*sqrt(Q)*randn(n,1);
z2=Ctr*xreal+sqrt(R)*randn(dm,1);
xre0=xreal;

xretotb=[xr0 xreal];
xr0=xretotb;
% -----> TAHAP PREDIKSI
% Kovariansi error
Ppre=Atr*Pcor*Atr'+G*Q*G';
% Estimasi
xpre=Atr*xcor+Btr*u0;
% -----> TAHAP KOREKSI
% Kalman gain
K=Ppre*Ctr'*inv(Ctr*Ppre*Ctr'+R2);
% Kovariansi error
Pcor=(eye(n)-K*Ctr)*Ppre;
% Estimasi
xcor=xpre+K*(z2-Ctr*xpre);

xcortotb=[xcor0 xcor];
xcor0=xcortotb;
end
%% Identifikasi Sistem
for i=1:n
Tr(:,i)=T(:,[i]);
end
Tr;

```

```

xidre=Tr*xreal;
% xidre=nilai real sistem tereduksi(ident)
iterasi ke j
xretot2=Tr*xretotb;
% xretot2=nilai real sistem tereduksi(ident)
iterasi ke 1:j
xidcor=Tr*xcor;
% xidcor=nilai estimasi sistem
tereduksi(ident) iterasi ke j
xcortot2=Tr*xcortotb;
% xcortot2=nilai estimasi sistem
tereduksi(ident) iterasi ke 1:j
%% End 2
minTime2=Inf;
tElapsed2=toc(tStart2);
minTime2=min(tElapsed2,minTime2);
% Waktu selesai 2
%% Grafik
xreala(2:s+1)=xreala; xcora(2:s+1)=xcora;
xidcor(2:s+1)=xidcor;
xreala(s+2)=xreala(s+1);
xcora(s+2)=xcora(s+1);
xidcor(s+2)=xidcor(s+1); s=s+1;
xreala(1)=100; xcora(1)=100; xidcor(1)=100;
figure(1);
plot(hsv,'*');
title('Nilai Singular
Hankel','fontweight','bold','fontsize',10,'col
or',[.0 .0 .1]); hold on;
xlabel('Orde');
ylabel('Nilai');
grid on
figure(2);
t=logspace(-3,3,200);
bode(sisAwal,'--g',sisSetimbang,':b',t);
title('Frekuensi Respon Sistem Awal dan Sistem
Setimbang','fontweight','bold','fontsize',10,'
color',[.0 .0 .1]); hold on;
legend('Sistem Awal','Sistem Setimbang',3);
figure(3);
t=logspace(-3,3,200);

```

```

bode(sisAwal,'--g',rsys,':r',t);
title(['Frekuensi Respon Sistem Awal dan
Sistem Tereduksi Ukuran '
num2str(n)], 'fontweight', 'bold', 'fontsize', 10,
'color', [.0 .0 .1]); hold on;
legend('Sistem Awal', 'Sistem Tereduksi dg
PS', 3);
figure(4)
plot((0:s), xreala, '-og', (0:s), xcora, '-
*m', (0:s), xidcor, '-*y');
title('Penyebaran Panas pada Batang Logam
(Terhadap
Posisi)', 'fontweight', 'bold', 'fontsize', 10, 'co
lor', [.0 .0 .1]); hold on;
xlabel('Posisi ke');
ylabel('Suhu (Derajat Celcius)');
legend('Real', 'KF', 'KF Tereduksi');
grid on
figure(5)
x=(1:j+1);
y1=xretot1;
plot(x, y1, 'DisplayName', 'Real')
hold on
y2=xcortot1;
plot(x, y2, ':', 'DisplayName', 'KF')
hold on
y3=xcortot2;
plot(x, y3, '--', 'DisplayName', 'KF Tereduksi')
title('Penyebaran Panas pada Batang Logam
(Terhadap
Iterasi)', 'fontweight', 'bold', 'fontsize', 10, 'c
olor', [.0 .0 .1]); hold on;
xlabel('Iterasi ke');
ylabel('Suhu (Derajat Celcius)');
legend('show')
grid on
figure(6)
err1=abs(xreala-xcora);
% err1=nilai error sistem awal dg estimasi
sistem awal pada iterasi ke j
errtot1=abs(xretot1-xcortot1);

```

```

% errrtot1=nilai error sistem awal dg estimasi
sistem awal pada iterasi ke 1:j
err2=abs(xreala-xidcor);
% err2=nilai error sistem awal dg estimasi
tereduksi(ident) pada iterasi ke j
errrtot2=abs(xretot1-xcortot2);
% errrtot2=nilai error sistem awal dg estimasi
tereduksi(ident) pada iterasi ke 1:j
plot((0:s),err1,'-or',(0:s),err2,'-ok');
title('Perbandingan Error: (Error 1 = Real-KF
& (Error 2 = Real-KF
Tereduksi)', 'fontweight', 'bold', 'fontsize', 10,
'color', [.0 .0 .1]);
xlim([0 s]);
xlabel('Posisi ke');
ylabel('Nilai Error');
legend('Error 1', 'Error 2');
grid on
figure(7)
plot(1:j+1,xretot1(v,:), '-
og', 1:j+1, xcortot1(v,:), '-
*m', 1:j+1, xcortot2(v,:), '-*y');
title(['Nilai Variabel Posisi ke '
num2str(v)], 'fontweight', 'bold', 'fontsize', 10,
'color', [.0 .0 .1]); hold on;
xlabel('Iterasi ke');
ylabel('Suhu (Derajat Celcius)');
legend('Real', 'KF', 'KF Tereduksi', 4);
grid on

```

## BIODATA PENULIS



**Fella Diandra Chrisandy** atau yang biasa dipanggil dengan Fella, lahir di Surabaya 12 Juli 1995. Penulis merupakan putri kedua dari pasangan Ir. Rudy Christanto dan Andria Agustin, S.Pd. Penulis menempuh pendidikan formal dimulai dari TK Dharmasiwi (2000-2001), SDN Airlangga IV No. 201 (2001-2005), SDN Babat Jerawat I No. 118 (2005-2007), SMPN 26 (2007-2010), dan SMAN 9 (2010-2013) Surabaya. Penulis

kemudian melanjutkan studi ke Departemen Matematika ITS pada tahun 2013 untuk menempuh pendidikan S1. Di Departemen Matematika ITS penulis mengambil bidang minat Matematika Terapan yaitu Pemodelan Matematika. Selama kuliah penulis juga aktif mengikuti kegiatan organisasi dalam bidang seni seperti Unit Kegiatan Mahasiswa (UKM) Musik ITS. Selain aktif dalam organisasi, penulis juga aktif dalam kepanitiaan di berbagai acara seperti MOV UKM Musik ITS, 50 Tahun Matematika ITS, Persekutuan Doa FMIPA, dan lain-lain. Untuk mengisi waktu luang selama kuliah, penulis telah memiliki pengalaman sejak semester 4 sebagai asisten dosen mata kuliah Kalkulus I & II.

Untuk Informasi lebih lanjut mengenai Tugas Akhir ini dapat ditujukan ke penulis melalui pengiriman email ke *felladc26@gmail.com*.